Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

2000 Solutions
Concours Fermat (11e - Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Partie A

1. La somme de $29 + 12 + 23$ est égale à :

   (**A**) 6^2 (**B**) 4^4 (**C**) 8^8 (**D**) 64^0 (**E**) 2^6

   Solution

   $$\begin{aligned} 29 + 12 + 23 &= 64 \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

   RÉPONSE : (E)

2. Si la suite de cinq flèches, illustrée ci-dessous, se répète sans cesse, quelle flèche sera située dans la 48ᵉ position?

   $\longrightarrow$, $\nearrow$, $\nwarrow$, $\longleftarrow$, $\downarrow$

   (**A**) $\longrightarrow$ (**B**) $\nearrow$ (**C**) $\nwarrow$ (**D**) $\longleftarrow$ (**E**) $\downarrow$

   Solution

   Puisque la suite se répète, après neuf cycles, la cinquième flèche sera dans la 45ᵉ position.
   La troisième flèche sera donc dans la 48ᵉ position. RÉPONSE : (C)

3. Un fermier possède 7 vaches, 8 brebis et 6 chèvres. Combien d'autres chèvres devrait-il acheter pour que la moitié de ses animaux soient des chèvres?

   (**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 21 (**D**) 9 (**E**) 6

   Solution 1

   Puisqu'il y a 15 animaux qui ne sont pas des chèvres, il faut 15 chèvres pour que la moitié des animaux soient des chèvres. Le fermier devrait donc en acheter neuf.

   Solution 2

   Soit x le nombre de chèvres qu'il faut ajouter.
   Le nombre total de chèvres est donc égal à $6 + x$, tandis que le nombre d'animaux est égal à $21 + x$. Donc :

$$\begin{aligned} 2(6+x) &= 21+x \\ 12+2x &= 21+x \\ 12+x &= 21 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Comme dans la solution 1, le fermier devrait acheter neuf chèvres. RÉPONSE : (D)

4. On divise le carré de 9 par la racine cubique de 125. Quel est le reste?

(**A**) 6 (**B**) 3 (**C**) 16 (**D**) 2 (**E**) 1

Solution

Le carré de 9 est 81 et la racine cubique de 125 est 5.
Lorsqu'on divise 81 par 5, le quotient est 16 et le reste est 1.
En effet, $81 = 5 \times 16 + 1$. RÉPONSE : (E)

5. La somme et le produit de 2, 3, 5 et y sont égaux. Quelle est la valeur de y?

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{10}{31}$ (**C**) $\frac{10}{29}$ (**D**) $\frac{3}{10}$ (**E**) $\frac{10}{3}$

Solution

On a : $(2)(3)(5)(y) = 2+3+5+y$

$$\begin{aligned} 30y &= 10+y \\ 29y &= 10 \\ y &= \frac{10}{29} \end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

6. Un élève utilise une calculatrice pour obtenir une réponse, mais au lieu d'utiliser la touche $\boxed{x^2}$, il utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ par erreur. Sa réponse est 9. Quelle réponse aurait-il dû obtenir?

(**A**) 243 (**B**) 81 (**C**) 729 (**D**) 3 (**E**) 6561

Solution 1

Puisque $\sqrt{x} = 9$, $x = 81$.
Donc $x^2 = 81^2$, ou 6561.

Solution 2
Puisque la racine carrée du nombre affiché est 9, le nombre affiché était 81. Il aurait dû obtenir 81^2, ou 6561. RÉPONSE : (E)

7. La somme de $(-300)+(-297)+(-294)+\ldots+306+309$ est :

(**A**) 309 (**B**) 927 (**C**) 615 (**D**) 918 (**E**) 18

Solution
On peut montrer quelques termes de plus de cette expression :
$(-300)+(-297)+(-294)+\ldots+(-3)+0+3+\ldots+294+297+300+303+306+309$
La somme de –300 à 300 est égale à 0. La somme recherchée est donc égale à $303+306+309$, ou 918. RÉPONSE : (D)

8. Lors d'un référendum à l'école, $\frac{3}{5}$ des élèves ont voté « oui » et 28 % ont voté « non ». Si aucun bulletin de vote n'a été annulé, quel pourcentage des élèves n'ont pas voté?

(**A**) 72 % (**B**) 40 % (**C**) 32 % (**D**) 12 % (**E**) 88 %

Solution
Puisque $\frac{3}{5}$ des élèves, ou 60 %, ont voté « oui » et que 28 % ont voté « non », 88 % des élèves ont voté. Donc $100\,\% - 88\,\%$, ou 12 % des élèves n'ont pas voté. RÉPONSE : (D)

9. Les nombres 6, 14, x, 17, 9, y et 10 ont une moyenne de 13. Quelle est la valeur de $x+y$?

(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 25 (**E**) 35

Solution
Puisque les sept nombres ont une moyenne de 13, leur somme est égale à 7×13, ou 91. Donc $6+14+x+17+9+y+10=91$, ou $x+y+56=91$.
Donc $x+y=35$. RÉPONSE : (E)

10. Si $x(x(x+1)+2)+3=x^3+x^2+x-6$, alors x est égal à :

(**A**) 11 (**B**) -9 (**C**) -4 ou 3 (**D**) -1 ou 0 (**E**) -2

Solution
On peut exprimer le membre de gauche de l'équation comme suit :

$$x\big(x(x+1)+2\big)+3 = x\left(x^2+x+2\right)+3$$
$$= x^3+x^2+2x+3$$

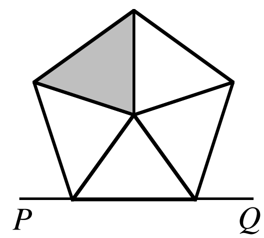
L'équation devient : $x^3+x^2+2x+3 = x^3+x^2+x-6$

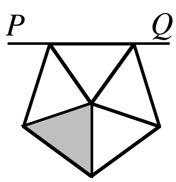
$$2x+3 = x-6$$
$$x = -9$$

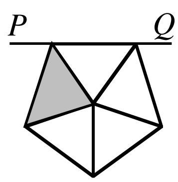
RÉPONSE : (B)

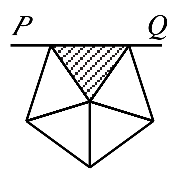
Partie B

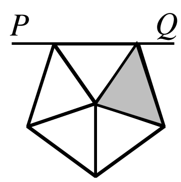
11. Lorsqu'on fait subir au pentagone régulier une réflexion par rapport à la droite PQ, suivie d'une rotation de 144° *dans le sens des aiguilles d'une montre*, dont le centre de rotation est le centre du pentagone, on obtient :

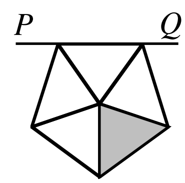


(**A**) 

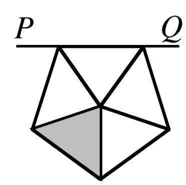
(**B**) 

(**C**) 

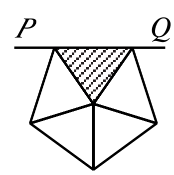
(**D**) 

(**E**) 

Solution
Après la réflexion, l'image correspond à la figure ci-contre.



Chacun des angles au centre du pentagone mesure $360° \div 5$, ou 72°. Une rotation de 144° (c'est-à-dire $2 \times 72°$) dans le sens des aiguilles d'une montre placera l'image dans la position ci-contre.



RÉPONSE : (C)

12. Si on évaluait l'expression $15^6 \times 28^5 \times 55^7$, la réponse se terminerait par une série de zéros consécutifs. Combien de zéros y aurait-il dans cette série?

(**A**) 10 (**B**) 18 (**C**) 26 (**D**) 13 (**E**) 5

Solution

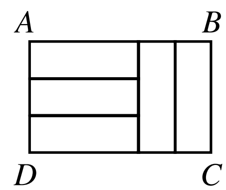
Chaque zéro à la fin du produit provient du produit de 2 et de 5. Il faut donc compter le nombre de fois que ce produit survient dans l'expression.

Or : $15^6 \times 28^5 \times 55^7 = (3 \cdot 5)^6 \left(2^2 \cdot 7\right)^5 (5 \cdot 11)^7$

$$= 3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^{10} \cdot 7^5 \cdot 5^7 \cdot 11^7$$
$$= 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 11^7 \cdot (2 \cdot 5)^{10}$$

Il y a aura dix zéros. RÉPONSE : (A)

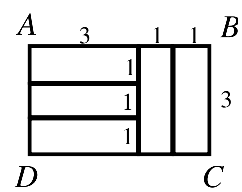
13. On divise le rectangle $ABCD$ en cinq rectangles congruents comme dans le diagramme. Le rapport $AB:BC$ est égal à :



(**A**) 3:2 (**B**) 2:1 (**C**) 5:2
(**D**) 5:3 (**E**) 4:3

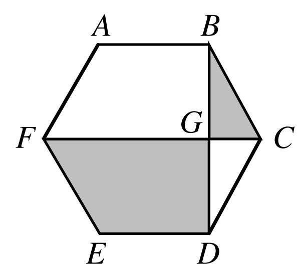
Solution

Si chaque petit rectangle a une largeur de 1 unité, chacun a une longueur de 3 unités comme l'indique le diagramme.
On voit que $AB:BC = 5:3$.



RÉPONSE : (D)

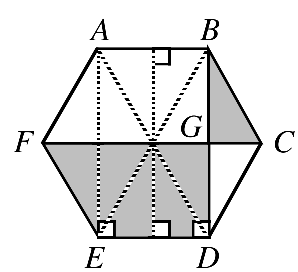
14. $ABCDEF$ est un hexagone régulier dont les diagonales FC et BD se croisent au point G. Le rapport de l'aire du quadrilatère $FEDG$ à celle du triangle BCG est égal à :



(**A**) $3\sqrt{3}:1$ (**B**) 4:1 (**C**) 6:1
(**D**) $2\sqrt{3}:1$ (**E**) 5:1

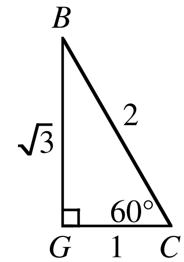
Solution 1

On trace les diagonales AD, BE et AE. On trace un segment parallèle à AE, passant par le point d'intersection de BE et de AD. Le quadrilatère $FEDG$ est formé de cinq triangles identiques au triangle BCG. Le rapport des aires est égal à 5:1.



Solution 2

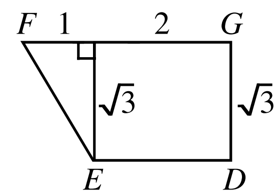
Supposons que les côtés de l'hexagone ont chacun une longueur de 2 unités. Puisque chaque angle de l'hexagone mesure 120°, $\angle BCG = \frac{1}{2}(120^\circ)$ ou 60°. Le triangle BCG est un triangle 30° - 60° - 90°. Donc $BG = \sqrt{3}$ et $GC = 1$. (Il s'agit d'un résultat bien connu. On peut l'obtenir en considérant le triangle BCG comme la moitié d'un triangle équilatéral et en utilisant le théorème de Pythagore.)



L'aire du triangle BCG est égale à $\frac{1}{2}(1)\sqrt{3}$, ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après le diagramme ci-contre, l'aire du quadrilatère $FGDE$ est égale à $2\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Le rapport des aires est égal à $\frac{5\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou 5:1.



RÉPONSE : (A)

15. Dans une suite, chaque terme, à partir du troisième, est le double de la somme des deux termes précédents. Le septième terme de la suite est 8 et le neuvième terme est 24. Quel est le onzième terme de la suite?

(**A**) 160 (**B**) 304 (**C**) 28 (**D**) 56 (**E**) 64

Solution

Soit t_7, t_8, t_9, t_{10} et t_{11} les termes numéros 7 à 11.

Puisque $t_9 = 2\left(t_7 + t_8\right)$, alors $24 = 2\left(8 + t_8\right)$, d'où $t_8 = 4$.

Donc : $t_{10} = 2\left(t_8 + t_9\right)$
$= 2(4 + 24)$
$= 56$

et $t_{11} = 2\left(t_9 + t_{10}\right)$
$= 2(24 + 56)$
$= 160$

RÉPONSE : (A)

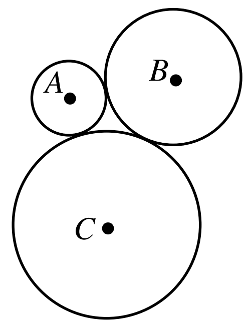
16. On place les chiffres 2, 2, 3 et 5 au hasard l'un à côté de l'autre pour former un nombre de quatre chiffres. Quelle est la probabilité pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{2}{3}$

Solution
Les nombres de quatre chiffres que l'on peut former avec les chiffres 2, 2, 3 et 5 sont 2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532, 3225, 3252, 3522, 5223, 5232 et 5322. Il y en a douze. Pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire, il faut que les deux chiffres soient pairs ou que les deux soient impairs. Les nombres qui vérifient cette condition sont 2352, 2532, 3225 et 5223. Il y en a quatre. La probabilité pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire est égale à $\frac{4}{12}$, ou $\frac{1}{3}$.

RÉPONSE : (B)

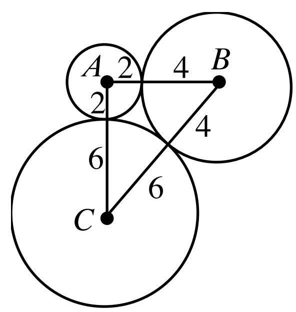
17. Les trois cercles de centres A, B et C ont des rayons respectifs de 2, 4 et 6 unités. Comme l'indique le diagramme, les cercles sont tangents l'un à l'autre. Dans le triangle ABC :



(**A**) $\angle A$ est obtus (**B**) $\angle B = 90°$ (**C**) $\angle A = 90°$

(**D**) tous les angles sont aigus (**E**) $\angle B = \angle C$

Solution
Puisque les cercles sont tangents l'un à l'autre, les segments qui joignent leurs centres passent par les points de tangence. Les côtés du triangle ABC ont pour longueurs 6, 8 et 10 comme l'indique le diagramme.
Puisque $10^2 = 6^2 + 8^2$, le triangle est rectangle en A.



RÉPONSE : (C)

18. Soit $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ et $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$. Alors $P^2 - Q^2$ est égal à :

(**A**) 3^{4000} (**B**) 2×3^{-4000} (**C**) 0 (**D**) 2×3^{4000} (**E**) 4

Solution 1

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= (P+Q)(P-Q) \\ &= \left[\left(3^{2000} + 3^{-2000}\right) + \left(3^{2000} - 3^{-2000}\right)\right]\left[\left(3^{2000} + 3^{-2000}\right) - \left(3^{2000} - 3^{-2000}\right)\right] \\ &= \left(2 \cdot 3^{2000}\right)\left(2 \cdot 3^{-2000}\right) \\ &= 2^2 \cdot 3^0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Solution 2

$$\begin{aligned} P^2 - Q^2 &= \left(3^{2000} + 3^{-2000}\right)^2 - \left(3^{2000} - 3^{-2000}\right)^2 \\ &= 3^{4000} + 2 \cdot 3^{2000} \cdot 3^{-2000} + 3^{-4000} - 3^{4000} + 2 \cdot 3^{2000} \cdot 3^{-2000} - 3^{-4000} \\ &= 4 \cdot 3^0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

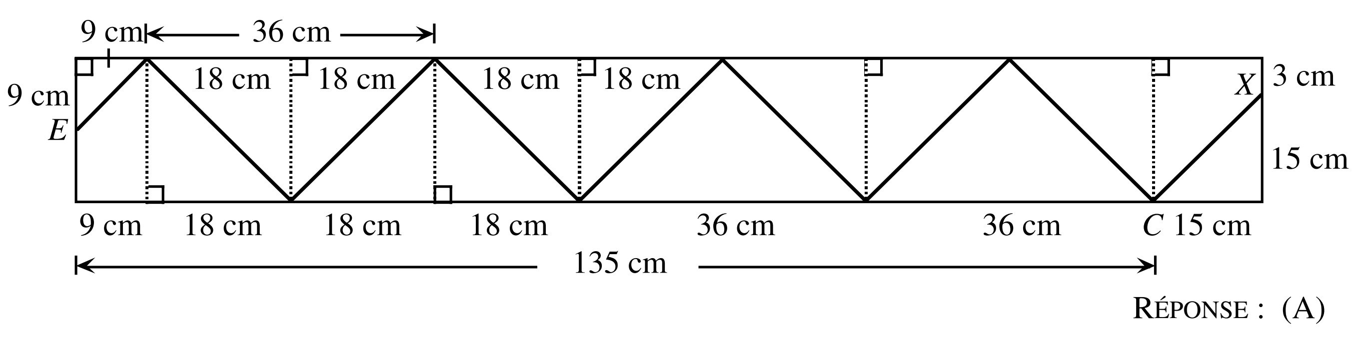
RÉPONSE : (E)

19. Une fourmi se promène à l'intérieur d'un rectangle mesurant 18 cm sur 150 cm. La fourmi parcourt des chemins droits qui forment tous des angles de 45° avec les côtés du rectangle. La fourmi commence à un point X situé sur un des petits côtés du rectangle. La première fois que la fourmi atteint le côté opposé, elle arrive au milieu du côté. Quelle est la distance, en centimètres, du point X jusqu'au coin le plus proche?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Solution

Si on filmait la fourmi et que l'on visionnait le film à rebours, on la verrait partir du point E pour terminer son trajet au point X. Comme l'indique le diagramme, lorsque la fourmi se rend du point E au point B, elle parcourt une distance horizontale de 9 cm car le triangle BAE est un triangle rectangle isocèle. De même, elle parcourt une distance horizontale de 18 cm lorsqu'elle traverse le rectangle. Il en est de même jusqu'au point C. Au point C, la fourmi a parcouru une distance horizontale de $9+18+3\times 36$, ou 135 cm. Il lui reste une distance horizontale de 15 cm à parcourir. Le point X est donc situé à 15 cm d'un coin et à 3 cm de l'autre. Le point X est donc à 3 cm du coin le plus proche.



RÉPONSE : (A)

20. Soit $a+2b+3c+4d+5e=k$ et $5a=4b=3c=2d=e$. Quel est le plus petit entier strictement positif, k, pour lequel a, b, c, d et e sont tous des entiers strictement positifs?

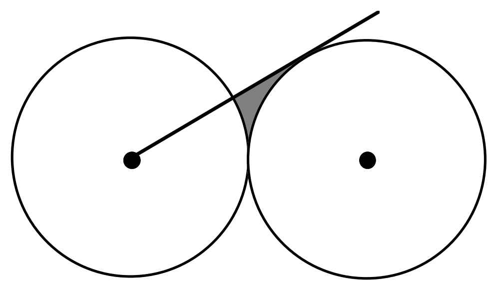
(**A**) 87 (**B**) 522 (**C**) 10 (**D**) 120 (**E**) 60

Solution
Puisque $5a = 4b = 3c = 2d = e$, e est le plus grand et a est le plus petit des entiers. De plus e est divisible par 5, 4, 3 et 2. Donc la plus petite valeur possible de e est 60. Les valeurs respectives de a, b, c et d qui correspondent à cette valeur de e sont 12, 15, 20 et 30. Le plus petit entier strictement positif, k, est donc $12 + 2(15) + 3(20) + 4(30) + 5(60)$, ou 522.

RÉPONSE : (B)

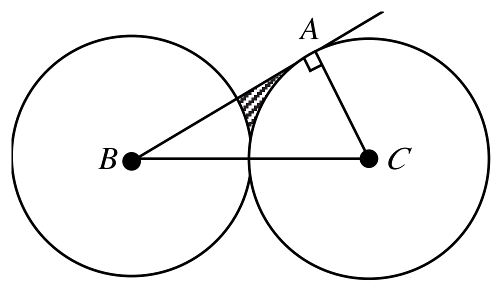
Partie C

21. Deux cercles, ayant chacun un rayon de 10 unités, sont tangents l'un à l'autre. On trace une droite, tangente à un des cercles, à partir du centre de l'autre cercle. Quelle est l'aire de la région ombrée, à l'unité près?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8
(**D**) 9 (**E**) 10

Solution
Soit B et C les centres des cercles et soit A le point de contact de la tangente du point B au cercle de centre C. Puisque la tangente est perpendiculaire au rayon au point de contact, le triangle ABC est rectangle.
Puisque $AC:BC = 1:2$, alors $AC:BC:AB = 1:2:\sqrt{3}$ selon le théorème de Pythagore. (Voir la solution 2 du numéro 14.)



On a donc $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$, $AC = 10$, $BC = 20$ et $AB = 10\sqrt{3}$. L'aire de la partie ombrée est égale à l'aire du triangle ABC moins l'aire des deux secteurs. Puisque $\angle B = 30°$ et $\angle C = 60°$, l'aire des deux secteurs est égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire d'un cercle de rayon 10.

L'aire de la partie ombrée est égale à : $\frac{1}{2}(10)\left(10\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\pi(10)^2$
$$= 50\sqrt{3} - 25\pi$$
$$\approx 8{,}063$$
Arrondie à l'entier près, elle est égale à 8.

RÉPONSE : (C)

22. On considère un entier de 2000 chiffres dont le premier chiffre, à l'extrême gauche, est un 3. Les chiffres de l'entier sont placés de manière que n'importe quels deux chiffres consécutifs forment un nombre divisible par 17 ou par 23. Le 2000^{e} chiffre peut être a ou b. Quelle est la

valeur de $a+b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 4 (**D**) 10 (**E**) 17

Solution
On remarque que les multiples de 17 formés de deux chiffres sont 17, 34, 51, 68 et 85. De même, les multiples de 23 formés de deux chiffres sont 23, 46, 69 et 92. Puisque le premier chiffre de l'entier est un 3 et que seul le nombre 34 dans la liste des multiples commence par un 3, le deuxième chiffre de l'entier doit être un 4. De même, le troisième chiffre doit être un 6. Le quatrième chiffre peut être un 8 ou un 9. On considère deux cas.

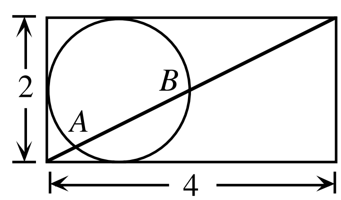
1er cas
Le quatrième chiffre est un 8. Les chiffres suivants sont 5, 1 et 7. Puisqu'il n'y aucun multiple dans la liste qui commence par un 7, l'entier est 3468517.

2e cas
Le quatrième chiffre est un 9. On obtient alors 34692 34692 34… Les cinq chiffres '34692' se répéteront à l'infini tant que l'on choisit le chiffre 9 après le chiffre 6.

Un entier de 2000 chiffres doit contenir 399 groupes des chiffres '34692'. Les cinq derniers chiffres peuvent être 34692 ou 34685. Le 2000e chiffre peut donc être un 2 ou un 5. Donc $a+b=2+5=7$.

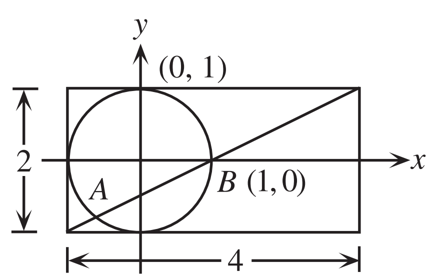
RÉPONSE : (B)

23. Un cercle est tangent à trois côtés d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 2 et 4 unités. Une diagonale du rectangle croise le cercle aux points A et B. La longueur de AB est égale à :



(**A**) $\sqrt{5}$ (**B**) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (**C**) $\sqrt{5}-\frac{1}{5}$ (**D**) $\sqrt{5}-\frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

Solution 1
Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. La plus facile est probablement d'utiliser un repère cartésien. Deux choix s'imposent pour l'origine, soit le centre du cercle ou le coin inférieur gauche du rectangle. Dans cette solution, on choisit le centre du cercle. Les axes sont parallèles aux côtés du rectangle. L'équation du cercle est $x^2+y^2=1$ et l'équation de la droite qui contient la diagonale est $y+1=\frac{1}{2}(x+1)$, ou



Pour un point d'intersection de la droite et du cercle, on reporte $x = 2y + 1$ dans l'équation du cercle. On obtient : $(2y+1)^2 + y^2 = 1$

$$5y^2 + 4y = 0$$
$$y(5y+4) = 0$$
$$y = 0 \text{ ou } y = -\frac{4}{5}$$

On reporte ces valeurs dans l'équation $x - 2y = 1$ pour obtenir $x = 1$ et $x = -\frac{3}{5}$.

Les points d'intersection sont $A\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ et $B(1, 0)$.

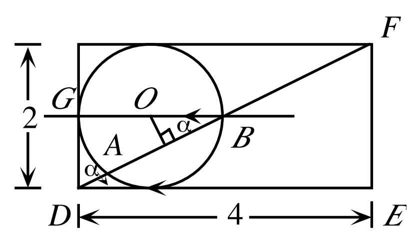
La longueur de AB est égale à : $\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{80}{25}}, \text{ ou } \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Remarque : Si on avait choisi l'autre point comme origine, l'équation de la droite serait $y = \frac{1}{2}x$ et celle du cercle, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Solution 2

Le point *B* est le centre du rectangle.
On trace le diamètre BG parallèle aux deux côtés du rectangle.
Soit *O* le centre du cercle. On abaisse une perpendiculaire OC à la diagonale. *C* est donc le milieu de la corde AB.



Puisque BG est parallèle à DE, $\angle BDE = \angle CBO = \alpha$.
Les triangles OBC et FDE sont donc semblables.
Selon le théorème de Pythagore, $DF = 2\sqrt{5}$. Donc $\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{CB}{4}$, d'où $CB = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.
La longueur de AB est égale à $2\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$, ou $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

RÉPONSE : (B)

24. On considère le système d'équations $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$ et $x + xy + xy^2 = 35$. La somme des valeurs réelles de *y* qui vérifient le système d'équations est égale à :

(**A**) 20 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) $\frac{55}{2}$ (**E**) $\frac{5}{2}$

Solution

Soit $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$ (1)

et $x + xy + xy^2 = 35$ (2).

On peut exprimer le membre de gauche de l'équation (1) comme suit :

$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = \left(x + xy^2\right)^2 - x^2y^2$$
$$= \left(x + xy^2 - xy\right)\left(x + xy^2 + xy\right)$$

L'équation (1) devient donc $\left(x + xy^2 - xy\right)\left(x + xy^2 + xy\right) = 525$.

On reporte l'équation (2) dans cette équation pour obtenir :

$$\left(x + xy^2 - xy\right)(35) = 525$$
$$x + xy^2 - xy = 15 \qquad (3)$$

On soustrait l'équation (3) de l'équation (2) pour obtenir $2xy = 20$, d'où $x = \frac{10}{y}$.

On reporte $x = \frac{10}{y}$ dans l'équation (3) :

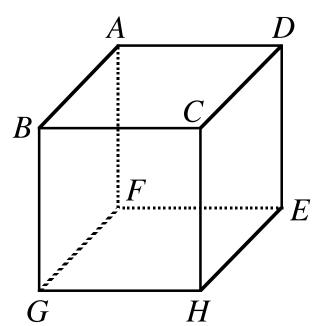
$$\frac{10}{y} + 10y - 10 = 15$$
$$10y^2 - 25y + 10 = 0$$
$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$
$$(2y - 1)(y - 2) = 0$$

Donc $2y - 1 = 0$ ou $y - 2 = 0$, d'où $y = \frac{1}{2}$ ou $y = 2$.

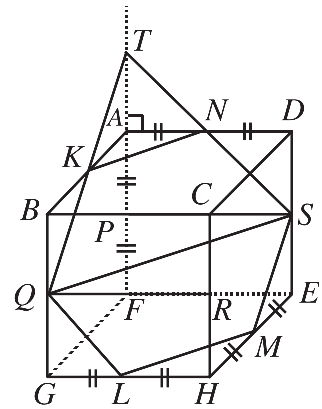
La somme des valeurs réelles de y qui vérifient le système d'équations est égale à $\frac{5}{2}$.

RÉPONSE : (E)

25. Le cube illustré est coupé en quatre sections par deux plans. Le premier plan est parallèle à la face $ABCD$ et passe au milieu de l'arête BG. Le deuxième plan passe par les milieux des arêtes AB, AD, HE et GH. Quel est le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux?



(**A**) 3:8 (**B**) 7:24 (**C**) 7:25
(**D**) 7:17 (**E**) 5:11



Solution
On peut attribuer une longueur de 2 aux arêtes. Le premier plan, qui est parallèle à la face $ABCD$ et qui passe au milieu de l'arête BG, coupe le cube en deux parties de même volume. Soit K, Q, L, M, S, N et P les milieux respectifs des arêtes AB, BG, GH, HE, ED, AD et AF. Le deuxième plan, qui passe par les points K, L, M et N, coupe le cube en deux parties de même volume et contient le segment QS. Les deux plans coupent donc le cube en quatre morceaux, soit deux grands morceaux identiques et deux petits morceaux identiques.
On prolonge QK et SN jusqu'au point T.
Les triangles TAN et TPS sont semblables puisqu'ils sont rectangles et que les côtés AN et PS sont parallèles.
Donc $\dfrac{TA}{TP}=\dfrac{AN}{PS}$ et puisque $PA=1$, on obtient $TA=1$.
Le volume du petit morceau du haut est égal au volume du tétraèdre $TQSP$ moins le volume du tétraèdre $TKNA$. Il est donc égal à : $\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{2}(2)(2)(2)\right)\right]-\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)(1)(1)(1)\right]$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\text{, ou }\frac{7}{6}$$

Le volume du grand morceau est égal à $2\times2\times1-\dfrac{7}{6}$, ou $\dfrac{17}{6}$.
Le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux est égal à 7:17.

RÉPONSE : (D)