



# Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation  
en mathématiques et en informatique,  
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

## Concours Fermat (11<sup>e</sup> – Sec. IV)

Le mercredi 23 février 2000

Avec la  
contribution de :



Chartered Accountants

Avec la  
participation de :



IBM  
Canada Ltée



Institut canadien  
des actuaires



Sybase  
inc (Waterloo)

Avec  
l'appui de :

London Life, compagnie  
d'assurance-vie et La  
Great-West, compagnie  
d'assurance-vie

Northern Telecom  
(Nortel)

Financière  
Manuvie

L'Équitable, Compagnie  
d'Assurance-Vie  
du Canada

**Durée :** 1 heure

© 2000 Waterloo Mathematics Foundation

**L'usage de la calculatrice est permis**, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

### Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A, B, C, D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
  - Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
  - Il n'y a pas de pénalité pour une réponse fautive.
  - Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation : Une réponse fautive *n'est pas* pénalisée.

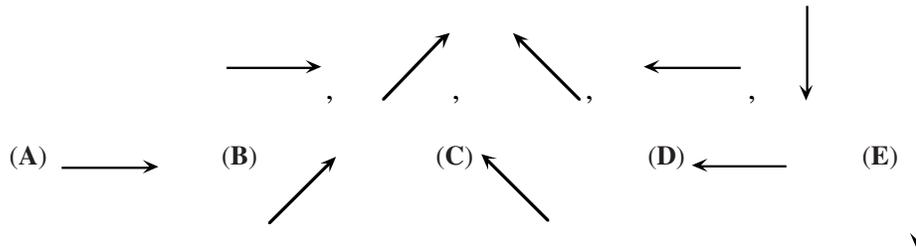
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

**Partie A : 5 points par question**

1. La somme de  $29 + 12 + 23$  est égale à :

- (A)  $6^2$       (B)  $4^4$       (C)  $8^8$       (D)  $64^0$       (E)  $2^6$

2. Si la suite de cinq flèches, illustrée ci-dessous, se répète sans cesse, quelle flèche sera située dans la 48<sup>e</sup> position?



3. Un fermier possède 7 vaches, 8 brebis et 6 chèvres. Combien d'autres chèvres devrait-il acheter pour que la moitié de ses animaux soient des chèvres?

- (A) 18      (B) 15      (C) 21      (D) 9      (E) 6

4. On divise le carré de 9 par la racine cubique de 125. Quel est le reste?

- (A) 6      (B) 3      (C) 16      (D) 2      (E) 1

5. La somme et le produit de 2, 3, 5 et  $y$  sont égaux. Quelle est la valeur de  $y$ ?

- (A)  $\frac{1}{3}$       (B)  $\frac{10}{31}$       (C)  $\frac{10}{29}$       (D)  $\frac{3}{10}$       (E)  $\frac{10}{3}$

6. Un élève utilise une calculatrice pour obtenir une réponse, mais au lieu d'utiliser la touche  $(x^2)$ , il utilise la touche  $(\sqrt{x})$  par erreur. Sa réponse est 9. Quelle réponse aurait-il dû obtenir?

- (A) 243      (B) 81      (C) 729      (D) 3      (E) 6561

7. La somme de  $(-300) + (-297) + (-294) + \dots + 306 + 309$  est :

- (A) 309      (B) 927      (C) 615      (D) 918      (E) 18

8. Lors d'un référendum à l'école,  $\frac{3}{5}$  des élèves ont voté « oui » et 28 % ont voté « non ». Si aucun bulletin de vote n'a été annulé, quel pourcentage des élèves n'ont pas voté?

- (A) 72 %      (B) 40 %      (C) 32 %      (D) 12 %      (E) 88 %

9. Les nombres 6, 14,  $x$ , 17, 9,  $y$  et 10 ont une moyenne de 13. Quelle est la valeur de  $x + y$ ?

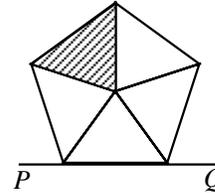
- (A) 20      (B) 21      (C) 23      (D) 25      (E) 35

10. Si  $x(x(x+1)+2)+3 = x^3 + x^2 + x - 6$ , alors  $x$  est égal à :

- (A) 11                      (B) -9                      (C) -4 or 3                      (D) -1 or 0                      (E) -2

**Partie B : 6 points par question**

11. Lorsqu'on fait subir au pentagone régulier une réflexion par rapport à la droite  $PQ$ , suivie d'une rotation de  $144^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre, dont le centre de rotation est le centre du pentagone, on obtient :



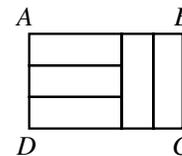
- (A) (B) (C) (D) (E)

12. Si on évaluait l'expression  $15^6 \times 28^5 \times 55^7$ , la réponse se terminerait par une série de zéros consécutifs. Combien de zéros y aurait-il dans cette série?

- (A) 10                      (B) 18                      (C) 26                      (D) 13                      (E) 5

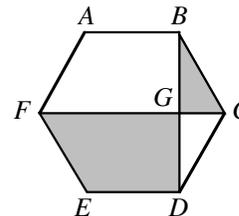
13. On divise le rectangle  $ABCD$  en cinq rectangles congruents comme dans le diagramme. Le rapport  $AB:BC$  est égal à :

- (A) 3:2                      (B) 2:1                      (C) 5:2  
(D) 5:3                      (E) 4:3



14.  $ABCDEF$  est un hexagone régulier dont les diagonales  $FC$  et  $BD$  se croisent au point  $G$ . Le rapport de l'aire du quadrilatère  $FEDG$  à celle du triangle  $BCG$  est égal à :

- (A)  $3\sqrt{3}:1$                       (B) 4:1                      (C) 6:1  
(D)  $2\sqrt{3}:1$                       (E) 5:1



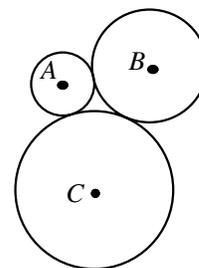
15. Dans une suite, chaque terme, à partir du troisième, est le double de la somme des deux termes précédents. Le septième terme de la suite est 8 et le neuvième terme est 24. Quel est le onzième terme de la suite?

- (A) 160                      (B) 304                      (C) 28                      (D) 56                      (E) 64

16. On place les chiffres 2, 2, 3 et 5 au hasard l'un à côté de l'autre pour former un nombre de quatre chiffres. Quelle est la probabilité pour que la somme du premier et du dernier chiffre soit paire?

- (A)  $\frac{1}{4}$                       (B)  $\frac{1}{3}$                       (C)  $\frac{1}{6}$                       (D)  $\frac{1}{2}$                       (E)  $\frac{2}{3}$

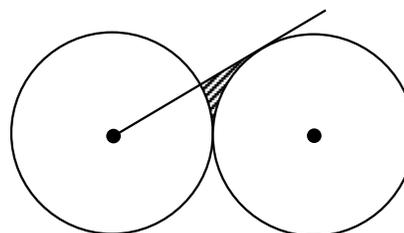
17. Les trois cercles de centres  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont des rayons respectifs de 2, 4 et 6 unités. Comme l'indique le diagramme, les cercles sont tangents l'un à l'autre. Dans le triangle  $ABC$  :
- (A)  $\angle A$  est obtus      (B)  $\angle B = 90^\circ$       (C)  $\angle A = 90^\circ$   
 (D) tous les angles sont aigus      (E)  $\angle B = \angle C$



18. Soit  $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$  et  $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$ . Alors  $P^2 - Q^2$  est égal à :
- (A)  $3^{4000}$       (B)  $2 \times 3^{-4000}$       (C) 0      (D)  $2 \times 3^{4000}$       (E) 4
19. Une fourmi se promène à l'intérieur d'un rectangle mesurant 18 cm sur 150 cm. La fourmi parcourt des chemins droits qui forment tous des angles de  $45^\circ$  avec les côtés du rectangle. La fourmi commence à un point  $X$  situé sur un des petits côtés du rectangle. La première fois que la fourmi atteint le côté opposé, elle arrive au milieu du côté. Quelle est la distance, en centimètres, du point  $X$  jusqu'au coin le plus proche?
- (A) 3      (B) 4      (C) 6      (D) 8      (E) 9
20. Soit  $a + 2b + 3c + 4d + 5e = k$  et  $5a = 4b = 3c = 2d = e$ . Quel est le plus petit entier strictement positif,  $k$ , pour lequel  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  sont tous des entiers strictement positifs?
- (A) 87      (B) 522      (C) 10      (D) 120      (E) 60

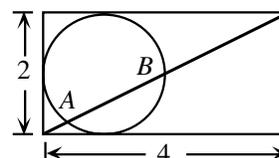
**Partie C : 8 points par question**

21. Deux cercles, ayant chacun un rayon de 10 unités, sont tangents l'un à l'autre. On trace une droite, tangente à un des cercles, à partir du centre de l'autre cercle. Quelle est l'aire de la région ombrée, à l'unité près?
- (A) 6      (B) 7      (C) 8  
 (D) 9      (E) 10



22. On considère un entier de 2000 chiffres dont le premier chiffre, à l'extrême gauche, est un 3. Les chiffres de l'entier sont placés de manière que n'importe quels deux chiffres consécutifs forment un nombre divisible par 17 ou par 23. Le 2000<sup>e</sup> chiffre peut être  $a$  ou  $b$ . Quelle est la valeur de  $a + b$ ?
- (A) 3      (B) 7      (C) 4      (D) 10      (E) 17

23. Un cercle est tangent à trois côtés d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 2 et 4 unités. Une diagonale du rectangle croise le cercle aux points  $A$  et  $B$ . La longueur de  $AB$  est égale à :



- (A)  $\sqrt{5}$       (B)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$       (C)  $\sqrt{5} - \frac{1}{5}$   
 (D)  $\sqrt{5} - \frac{1}{6}$       (E)  $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

à suivre ...

24. On considère le système d'équations  $x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = 525$  et  $x + xy + xy^2 = 35$ . La somme des valeurs réelles de  $y$  qui vérifient le système d'équations est égale à :

- (A) 20                      (B) 2                      (C) 5                      (D)  $\frac{55}{2}$                       (E)  $\frac{5}{2}$

25. Le cube illustré est coupé en quatre sections par deux plans. Le premier plan est parallèle à la face  $ABCD$  et passe au milieu de l'arête  $BG$ . Le deuxième plan passe par les milieux des arêtes  $AB$ ,  $AD$ ,  $HE$  et  $GH$ . Quel est le rapport des volumes du plus petit et du plus grand des quatre morceaux?

- (A) 3:8                      (B) 7:24                      (C) 7:25  
(D) 7:17                      (E) 5:11

