Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

# 2000 Solutions

# Concours Euclide

(12e année – Sec. V)

pour les prix

**The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING**

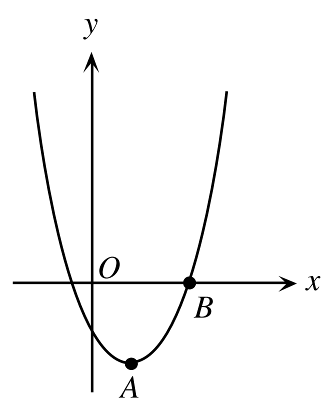
1. a) Si $x + 27^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}}$, quelle est la valeur de $x$?

***Solution***
$125^{\frac{1}{3}} = 5$ et $27^{\frac{1}{3}} = 3$
L'équation est donc $x + 3 = 5$, d'où $x = 2$.

b) La droite d'équation $y = ax + c$ passe par le point $(1, 5)$ et elle est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Quelle est la valeur de $c$?

***Solution***
La droite d'équation $y = 2x$ a une pente de 2. Puisque les droites sont parallèles, l'autre droite a une pente de 2. Son équation a donc la forme $y = 2x + c$. Puisque le point $(1, 5)$ est sur la droite, $5 = 2(1) + c$, d'où $c = 3$.

c) La parabole d'équation $y = (x - 2)^2 - 16$ a pour sommet $A$ et elle croise l'axe des $x$ au point $B$, comme l'indique le diagramme. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points $A$ et $B$.

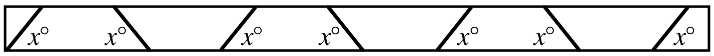


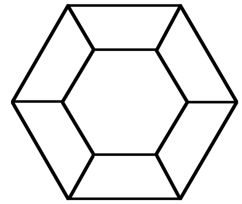

***Solution***
Pour un point sur l'axe des $x$, on a $y = 0$, d'où $(x - 2)^2 - 16 = 0$.

$$[(x-2)-4][(x-2)+4] = 0$$

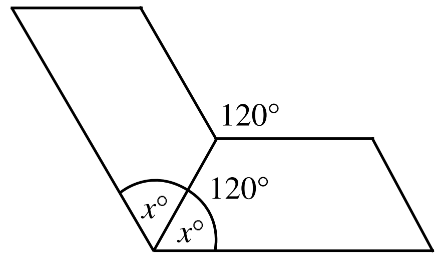
Donc $x = 6$ ou $x = -2$.
Les coordonnées du point $B$ sont donc $(6, 0)$.
Le sommet de la parabole est le point $A(2, -16)$.
La droite qui passe par les points $A(2, -16)$ et $B(6, 0)$ a pour pente $\dfrac{-16-0}{2-6}$, ou 4.
La droite a donc pour équation $\dfrac{y-0}{x-6} = 4$, ou $y = 4x - 24$.

2. a) On a découpé six morceaux identiques d'une planche de bois, comme l'indique le premier diagramme. Chaque trait de scie a été fait à un angle de $x°$. Les morceaux sont ensuite rassemblés pour former un cadre hexagonal illustré dans le deuxième diagramme. Quelle est la valeur de $x$?



***Solution***
Chaque angle intérieur d'un hexagone régulier mesure 120°.
Lorsqu'on place deux morceaux pour former le cadre, on a : $2x = 120$ (en degrés)
$x = 60$




b) Si $\log_{10} x = 3 + \log_{10} y$, quelle est la valeur de $\frac{x}{y}$?

***Solution***
L'équation devient :

$$\log_{10} x - \log_{10} y = 3$$

$$\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = 3$$

$$\frac{x}{y} = 10^3, \text{ ou } \frac{x}{y} = 1000$$

c) Si $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$, déterminer toutes les valeurs de l'expression $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

***Solution 1*** 'En prenant le carré de chaque membre'

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{13}{6}\right)^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{169}{36}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{169}{36} - \frac{72}{36}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{97}{36}$$

***Solution 2*** ‘En multipliant chaque membre par $6x$’

$$6x\left(x+\frac{1}{x}\right)=6x\left(\frac{13}{6}\right)$$
$$6x^2+6=13x$$
$$6x^2-13x+6=0$$
$$(3x-2)(2x-3)=0$$
$$x=\frac{2}{3} \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

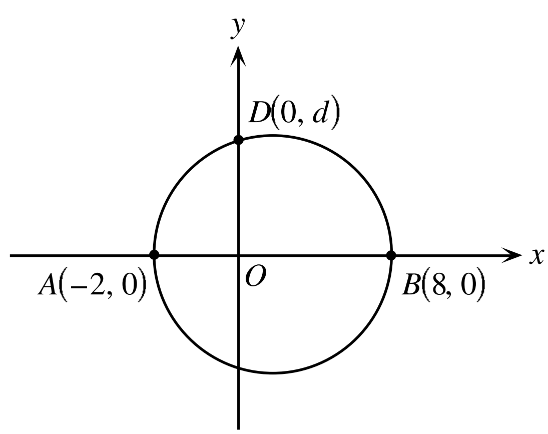
Si $x=\frac{2}{3}$, alors : $x^2+\frac{1}{x^2}$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{81+16}{36}$$
$$=\frac{97}{36}$$

Si $x=\frac{3}{2}$, alors : $x^2+\frac{1}{x^2}$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{4}{9}$$
$$=\frac{97}{36}$$

3. a) Le diagramme illustre un cercle de diamètre $AB$. Le cercle croise la partie positive de l’axe des $y$ au point $D(0, d)$. Quelle est la valeur de $d$?




***Solution 1***

D’après le diagramme, le cercle a un rayon de 5 et son centre est le point $(3, 0)$. Donc :

$$(0-3)^2+(d-0)^2=5^2$$
$$9+d^2=25$$
$$d^2=16$$

Puisque $d>0$, $d=4$.

***Solution 2***

Puisque $AB$ est un diamètre du cercle, l'angle $ADB$ intercepte un demi-cercle et il est donc droit. De plus, $\angle AOD = 90°$.

Les triangles $ADO$ et $DBO$ sont donc semblables car deux de leurs angles sont congrus deux à deux.

Donc $\frac{OD}{AO} = \frac{BO}{OD}$, d'où $d^2 = 2(8)$.

Donc $d^2 = 16$

Puisque $d > 0$, $d = 4$.

***Solution 3***

Comme dans la solution 2, $\angle ADB = \angle AOD = \angle BOD = 90°$.

Dans le triangle $AOD$, on a donc $AD^2 = 4 + d^2$.

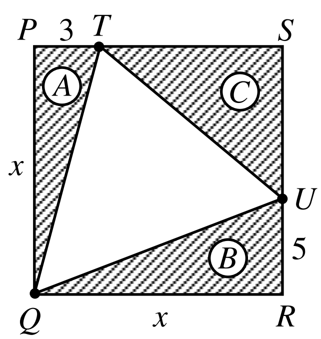
Dans le triangle $BOD$, on a $DB^2 = 64 + d^2$.

Dans le triangle $ADB$, on a $\left(4 + d^2\right) + \left(64 + d^2\right) = 100$.

$$2d^2 = 32$$

Puisque $d > 0$, $d = 4$.

b) Le diagramme illustre un carré $PQRS$, ayant des côtés de longueur $x$. Le carré est subdivisé en quatre régions triangulaires de manière que l'aire de (A) + l'aire de (B) = l'aire de (C). Si $PT = 3$ et $RU = 5$, déterminer la valeur de $x$.




***Solution***

Puisque les côtés du carré ont pour longueur $x$, $TS = x - 3$ et $US = x - 5$.

Aire du triangle $A = \frac{1}{2}(3)(x)$.

Aire du triangle $B = \frac{1}{2}(5)(x)$

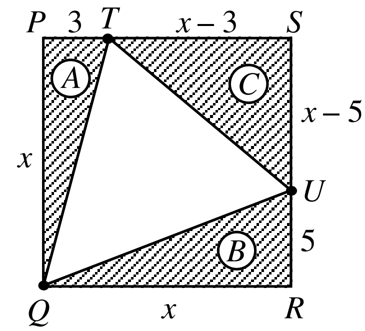
Aire du triangle $C = \frac{1}{2}(x - 5)(x - 3)$

D'après les renseignements :

$$\frac{1}{2}(3x)+\frac{1}{2}(5x)=\frac{1}{2}(x-5)(x-3)$$
$$3x+5x=x^2-8x+15$$
$$x^2-16x+15=0$$
$$(x-15)(x-1)=0$$
$$x=15 \text{ ou } x=1$$

Donc $x=15$, puisque $x=1$ est inadmissible.

Diagramme




4. a) On jette un dé juste, dont les numéros 1, 2, 3, 4, 6 et 8 sont inscrits sur ses six faces. Après ce jet, si un numéro impair paraît sur la face supérieure, tous les numéros impairs sur le dé sont doublés; si un numéro pair paraît sur la face supérieure, tous les numéros pairs sont divisés par 2. Si on jette un tel dé deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet?

***Solution***

Deux résultats sont possibles sur le premier jet, soit pair et impair.

*Première possibilité* : 'Le premier jet donne un numéro impair'

La probabilité pour que le premier jet donne un numéro impair est égale à $\frac{1}{3}$.

On double alors tous les numéros impairs sur le dé pour obtenir 2, 2, 6, 4, 6, 8.

La probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir un numéro impair suivi d'un 2 est donc égale à $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{9}$.

*Deuxième possibilité* : 'Le premier jet donne un numéro pair'

La probabilité pour que le premier jet donne un numéro pair est égale à $\frac{2}{3}$.

On divise alors tous les numéros pairs sur le dé pour obtenir 1, 1, 3, 2, 3, 4.

La probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet est égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir un numéro pair suivi d'un 2 est donc égale à $\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{9}$.

Au départ, la probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet est égale à $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$, ou $\frac{2}{9}$.

b) Le tableau ci-dessous donne les résultats de fin de saison 1998 de sept équipes de la ligue de cricket d'Angleterre. À la fin de la saison, chaque équipe avait joué 17 matchs. Le nombre total de points remportés par chaque équipe est indiqué dans la dernière colonne. Chacune des $V$ victoires rapporte $v$ points, chacun des $N$ matchs nuls rapporte $n$ points, chacun des $A$ lancers bonis rapporte $a$ points et chacun des $B$ bonis de batte rapporte $b$ points, $v$, $n$, $a$ et $b$ étant des entiers strictement positifs. *Aucun point* n'est accordé pour une défaite. Déterminer les valeurs de $v$, $n$, $a$ et $b$ si le total des points est accordé selon la formule :
$\text{Points} = v \times V + n \times N + a \times A + b \times B$

Résultats de fin de saison

| | *V* | *Défaites* | *N* | *A* | *B* | *Points* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sussex | 6 | 7 | 4 | 30 | 63 | 201 |
| Warks | 6 | 8 | 3 | 35 | 60 | 200 |
| Som | 6 | 7 | 4 | 30 | 54 | 192 |
| Derbys | 6 | 7 | 4 | 28 | 55 | 191 |
| Kent | 5 | 5 | 7 | 18 | 59 | 178 |
| Worcs | 4 | 6 | 7 | 32 | 59 | 176 |
| Glam | 4 | 6 | 7 | 36 | 55 | 176 |

***Solution***

On peut déterminer la valeur des inconnues de plusieurs façons.
La façon la plus efficace est de faire appel à des équations ayant plusieurs coefficients en commun. Voici une telle façon de s'y prendre.

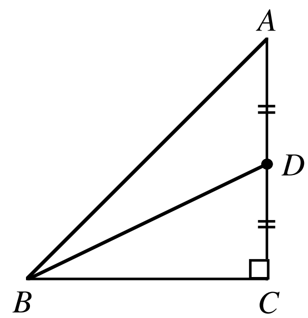
Les résultats de Sussex donnent l'équation : $6v + 4n + 30a + 63b = 201$
Les résultats de Som donnent l'équation : $6v + 4n + 30a + 54b = 192$
On soustrait, membre par membre, pour obtenir : $9b = 9$, d'où $b = 1$

Sachant que $b = 1$ :
Les résultats de Derbys donnent l'équation : $6v + 4n + 28a + 55 = 191$
$6v + 4n + 28a = 136 \quad (1)$
Les résultats de Sussex donnent l'équation : $6v + 4n + 30a + 63 = 201$
$6v + 4n + 30a = 138 \quad (2)$
On soustrait, membre par membre, l'équation (1) de l'équation (2) pour obtenir $2a = 2$, d'où $a = 1$.
On peut déterminer les valeurs de $n$ et de $v$ en reportant $a = 1$ et $b = 1$ dans des équations appropriées.
Les résultats de Som donnent l'équation : $6v + 4n + 84 = 192$
$6v + 4n = 108 \quad (3)$
Les résultats de Warks donnent l'équation : $6v + 3n + 95 = 200$

$$6v + 3n = 105 \quad (4)$$

On soustrait, membre par membre, l'équation (4) de l'équation (3), pour obtenir $n = 3$.
On reporte $n = 3$ dans (3) pour obtenir $6v + 4(3) = 108$, d'où $v = 16$.
On a donc $v = 16$, $n = 3$, $a = b = 1$.

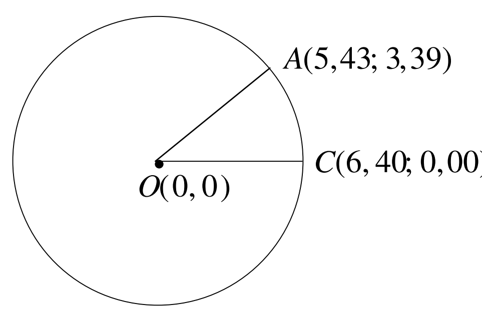
5. a) Dans le diagramme, on a $AD = DC$, $\sin \angle DBC = 0{,}6$ et $\angle ACB = 90°$. Quelle est la valeur de $\tan \angle ABC$?




***Solution***

Soit $DB = 10$.
Puisque $\sin \angle DBC = 0{,}6$, $DC = AD = 6$.
D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 10^2 - 6^2$, ou 64.
Donc $BC = 8$.
Donc $\tan \angle ABC = \frac{12}{8}$, ou $\frac{3}{2}$.

b) Le diagramme représente une coupe transversale de la Terre. Les axes de coordonnées sont placés pour que le centre de la Terre soit situé au point $O(0, 0)$. Le Cap Canaveral est situé au point $C(6{,}40; 0{,}00)$. Une navette spaciale est forcée d'atterrir sur une île au point $A(5{,}43; 3{,}39)$. Chaque unité représente 1000 km. Déterminer la distance entre l'île et le Cap Canaveral, telle que mesurée sur la surface courbe de la Terre. Exprimer la réponse aux 10 km près.




***Solution***

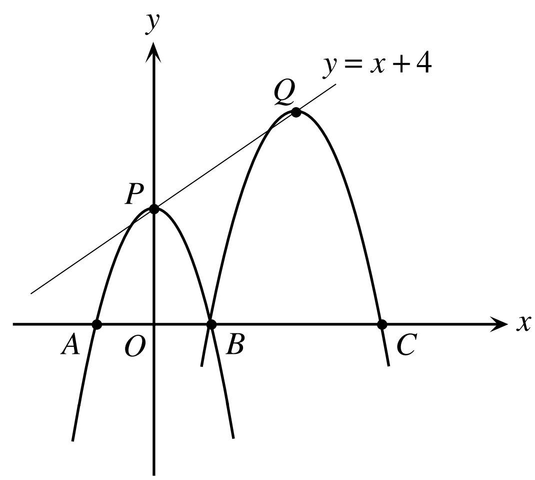
$$\tan \angle AOC = \frac{3{,}39}{5{,}43}$$
$$\angle AOC = 31{,}98°$$

$\overset{\frown}{AC} = \frac{31,98}{360}[(2\pi)(6,40)]$
$= 3,57$ unités
La distance est d'environ 3570 km.

6. a) L'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à $x$. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ et $\lfloor 2,6 \rfloor = 2$. Si $x$ est un nombre positif tel que $x\lfloor x \rfloor = 17$, quelle est la valeur de $x$?

***Solution***
On peut conclure que $4 < x < 5$. En effet, si $x \le 4$, alors $x\lfloor x \rfloor \le 16$ et si $x \ge 5$, alors $x\lfloor x \rfloor \ge 25$.
Donc $\lfloor x \rfloor = 4$
L'équation $x\lfloor x \rfloor = 17$ devient $4x = 17$, d'où $x = 4,25$.

b) La parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ a pour sommet $P$ et elle croise l'axe des $x$ aux points $A$ et $B$. La parabole subit une translation de manière que son sommet se promène le long de la droite d'équation $y = x + 4$ jusqu'au point $Q$. Dans cette position, la parabole croise l'axe des $x$ aux points $B$ et $C$. Déterminer les coordonnées du point $C$.




***Solution 1***
La parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ a pour sommet $P(0, 4)$ et elle croise l'axe des $x$ aux points $A(-2, 0)$ et $B(2, 0)$.
Le point $B(2, 0)$, qui est aussi situé sur la deuxième parabole, est l'image d'un point $B'$ sur la parabole initiale d'équation $y = -x^2 + 4$. Pour déterminer les coordonnées de $B'$, on déterminera le point d'intersection de la droite de pente 1 qui passe au point $B(2, 0)$ et de la parabole d'équation $y = -x^2 + 4$.
L'équation de cette droite est $y = x - 2$.
Aux points d'intersection, on a : $x - 2 = -x^2 + 4$

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x+3)(x-2) = 0$$

Donc $x = -3$ ou $x = 2$.
Si $x = 2$, alors $y = 0$, ce qui correspond au point $B$.
Si $x = -3$, alors $y = -5$. Les coordonnées de $B'$ sont donc $(-3, -5)$.
Puisque le point $(-3, -5)$ a pour image le point $(2, 0)$, la translation qui transforme la

parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ en une parabole de sommet $Q$ est définie par $(x, y) \to (x+5, y+5)$.

On peut compléter la solution de plusieurs façons.

*1re façon*
D'après la formule $(x, y) \to (x+5, y+5)$, $P(0, 4) \to Q(5, 9)$.

Puisque $C$ est le symétrique du point $B$ par rapport à l'axe de symétrique de la parabole, c.-à-d. la droite d'équation $x = 5$, les coordonnées du point $C$ sont $(8, 0)$.

*2e façon*
Puisque les coordonnées de $B'$ sont donc $(-3, -5)$, alors $C'$ est le symétrique du point $B'$ par rapport à l'axe des $y$. Les coordonnées de $C'$ sont donc $(3, -5)$.
D'après la formule $(x, y) \to (x+5, y+5)$, les coordonnées du point $C$ sont $(8, 0)$.

*3e façon*
D'après la formule $(x, y) \to (x+5, y+5)$, $P(0, 4) \to Q(5, 9)$.

L'équation de l'image de la parabole est donc $y = -(x-5)^2 + 9$.

Pour déterminer ses abscisses à l'origine, posons $-(x-5)^2 + 9 = 0$.

$$(x-5)^2 = 9$$
$$x - 5 = \pm 3$$

Donc $x = 8$ ou $x = 2$. Cette dernière est l'abscisse du point $B$.
Les coordonnées du point $C$ sont $(8, 0)$.

***Solution 2***
La translation qui déplace la parabole de sommet $P$ sur la parabole de sommet $Q$ est exprimée par la formule $(x, y) \to (x+t, y+t)$, car la droite d'équation $y = x + 4$ a une pente de 1.

Le point $B(2, 0)$, situé sur la parabole de sommet $Q$, est l'image d'un point $B'(2-t, -t)$ sur la parabole de sommet $P$. Il vérifie donc l'équation de cette parabole.

$$-t = -(2-t)^2 + 4$$
$$-t = -4 + 4t - t^2 + 4$$
$$t^2 - 5t = 0$$
$$t(t-5) = 0$$

Donc $t = 0$ ou $t = 5$. On rejette $t = 0$ qui représente une translation nulle.
Les coordonnées du point $B'$ sont $(-3, -5)$.
Soit $(c, 0)$ les coordonnées du point $C$.
Ce point est l'image d'un point de coordonnées $(c-5, -5)$ sur la parabole de sommet $P$.

Il vérifie donc son équation.

$$-5 = -(c-5)^2 + 4$$
$$(c-5)^2 = 9$$

Donc $c - 5 = 3$ ou $c - 5 = -3$.

$c = 8$ ou $c = 2$

Les coordonnées du point $C$ sont $(8, 0)$.

***Solution 3***

La translation qui déplace la parabole de sommet $P$ sur la parabole de sommet $Q$ est exprimée par la formule $(x, y) \to (x+t, y+t)$, car la droite d'équation $y = x + 4$ a une pente de 1.

Puisque le sommet $P$ a pour coordonnées $(0, 4)$, les coordonnées de $Q$ sont $(p, p+4)$.

L'équation de la parabole de sommet $Q$ est donc $y = -(x-p)^2 + p + 4$.

Puisque le point $(2, 0)$ est sur cette parabole :

$$0 = -(2-p)^2 + p + 4$$
$$p^2 - 5p = 0$$
$$p(p-5) = 0$$

Donc $p = 0$ ou $p = 5$. La première solution est rejetée puisqu'elle représente la translation nulle.

Les coordonnées du point $Q$ sont donc $(5, 9)$.

Comme dans la solution 1, les coordonnées du point $C$ sont $(8, 0)$.

7. a) Un cube a des arêtes de longueur $n$, $n$ étant un entier. Trois faces qui se rencontrent au même sommet sont peintes en rouge. On coupe ensuite le cube en $n^3$ petits cubes ayant des arêtes de longueur 1. Déterminer la valeur de $n$, sachant qu'exactement 125 de ces petits cubes n'ont aucune face rouge.

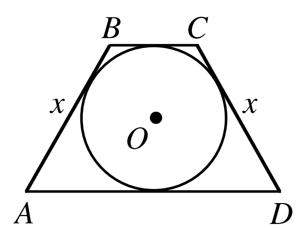
***Solution***

Si on retire les petits cubes qui ont au moins une face peinte en rouge, il reste un cube plus petit de dimensions $(n-1)\times(n-1)\times(n-1)$.

Donc $(n-1)^3 = 125$.

$$n = 6$$

b) On considère un trapèze isocèle $ABCD$ ayant une aire de 80 unités carrées et tel que $AB = CD = x$. Un cercle de centre $O$ et de rayon 4 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Déterminer la valeur de $x$.




***Solution***

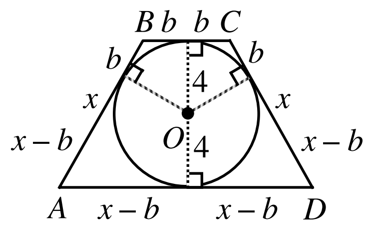
Le diagramme ci-contre indique les longueurs de certains segments. On a eu recours aux propriétés des tangentes à un cercle.

L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à :

$$\frac{1}{2}(8)(BC+AD)$$
$$=4(2b+2x-2b)$$
$$=8x$$

Donc $8x=80$.

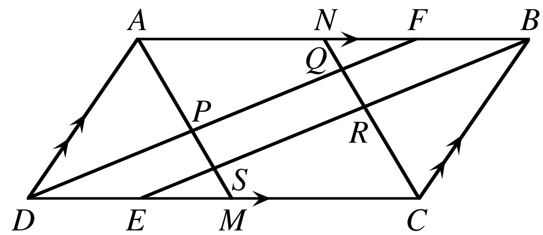
$x=10$




8. On considère un parallélogramme $ABCD$, où $AB=a$ et $BC=b$, $a>b$. Les points d'intersection des bissectrices des angles du parallélogramme forment un quadrilatère $PQRS$.

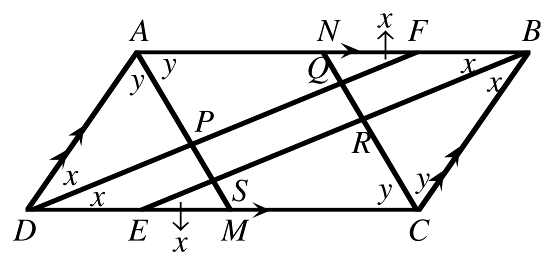
   a) Démontrer que $PQRS$ est un rectangle.

   b) Démontrer que $PR=a-b$.

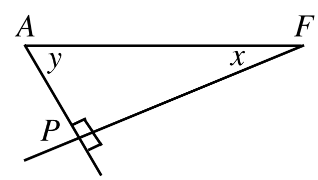



***Solution***

a) Les côtés opposés d'un parallélogramme sont congrus.
Puisque $DF$ et $BE$ sont les bissectrices de deux angles congrus,
$\angle ADF=\angle CDF=\angle ABE=\angle CBE=x°$.
Puisque les angles sont alternes-internes, $\angle CDF=\angle AFD=x°$.
Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires.
Donc $2x+2y=180$, d'où $x+y=90$.

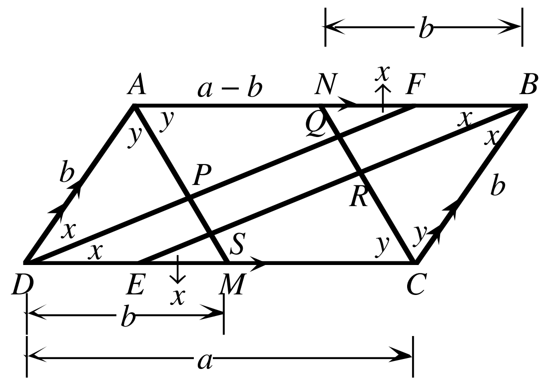



Donc dans le triangle $PAF$,
$\angle APF=90°$.




De la même manière, les angles sont droits aux points $Q$, $R$ et $S$.
Le quadrilatère $PQRS$ est donc un rectangle.

b) Puisque $AM$ est la bissectrice de l'angle $DAB$, $\angle DAM=\angle BAM=y°$.
Puisque ce sont des angles alternes-internes, $\angle DMA=\angle BAM=y°$.
Le triangle $ADM$ est donc isocèle.
De la même manière, le triangle $CBN$ est isocèle. On a donc les grandeurs suivantes.




$AN = a - b$

Les triangles $ADM$ et $CBN$ sont donc congruents.
Aussi, à cause des angles correspondants, les segments $AM$ et $NC$ sont parallèles.
Les triangles $ADP$ et $CBR$ sont semblables, puisque leurs angles sont congrus deux à deux.
Puisque $AD = BC$, les triangles sont congruents. Donc $AP = CR$.
Puisque le triangle $CBR$ est isocèle, la bissectrice $BR$ est aussi la médiatrice de $CN$.
Donc $QR = RC = AP$.
Le quadrilatère $APRN$ a donc des côtés, $AP$ et $RN$, qui sont parallèles et congrus.
Il est donc un parallélogramme.
Puisque $AN = a - b$, alors $PR = a - b$.

9. Une permutation des entiers 1, 2, ..., $n$ est un classement de ces entiers dans un certain ordre. Par exemple, $(3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3)$ sont deux permutations des entiers 1, 2, 3. On dit qu'une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$ des entiers 1, 2, ..., $n$ est *fantastique* si $a_1 + a_2 + ... + a_k$ est divisible par $k$, pour ***chaque*** valeur de $k$ de 1 à $n$. Par exemple, $(3, 1, 2)$ est une permutation fantastique de 1, 2, 3 car 3 est divisible par 1, $3+1$ est divisible par 2 et $3+1+2$ est divisible par 3. Par contre, la permutation $(2, 1, 3)$ n'est pas fantastique car $2+1$ n'est pas divisible par 2.

a) Démontrer qu'il n'existe aucune permutation fantastique si $n = 2000$.

b) Existe-t-il une permutation fantastique si $n = 2001$? Expliquer sa réponse.

***Solution***

a) Pour qu'il y ait une permutation fantastique lorsque $n = 2000$, il faut que $1+2+3+\ldots+2000$ soit divisible par 2000. Or :

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+2000 &= \frac{2000 \times 2001}{2}\\ &= 1000 \times 2001\end{aligned}$$

Ce nombre n'est pas divisible par 2000.
Il n'existe donc aucune permutation fantastique si $n = 2000$.

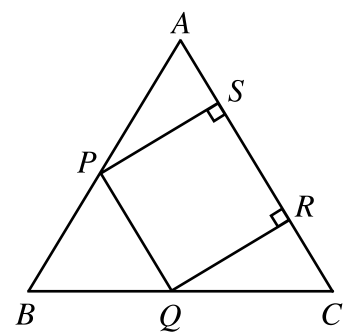
b) Soit la permutation $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2001})$.

$$\begin{aligned}t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{2001} &= 1+2+3+\ldots+2001\\ &= \frac{2001 \times 2002}{2}\\ &= 2001 \times 1001\end{aligned}$$

Ce nombre est divisible par 2001.

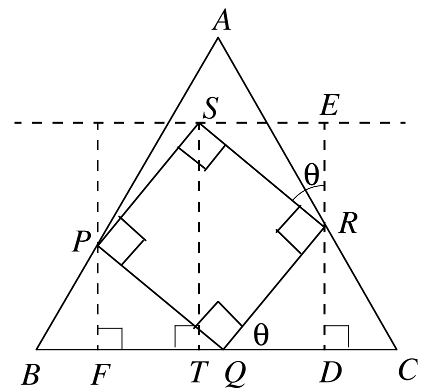
Si la permutation est fantastique, $t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{2000}$ doit être divisible par 2000.
Puisque $t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{2001}=2001\times 1001$, alors
$t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{2000}=2001\times 1001-t_{2001}$.
Puisque $2001\times 1001=2\,003\,001$, $t_{2001}$ doit être un entier de la forme $k001$, $k$ étant un chiffre impair, pour que $t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{2000}$ soit divisible par 2000.
Le seul entier, inférieur ou égal à 2001, qui vérifie cette propriété, est 1001.
Donc $t_{2001}=1001$.
Donc $2001\times 1001=2\,003\,001-1001$
$=2\,002\,000$.
Si la permutation est fantastique, on doit obtenir un multiple de 1999 lorsqu'on soustrait $t_{2000}$ de cette somme.
Or le plus grand multiple de 1999, inférieur à $2\,002\,000$, est $1999\times 1001$, ou $2\,000\,999$.
Si tel est le cas, alors $t_{2000}=2\,002\,000-2\,000\,999$, c'est-à-dire que $t_{2000}=1001$. Ce résultat est impossible car $t_{2000}\neq t_{2001}$.
Si on choisit des multiples de 1999 qui sont inférieurs à $2\,002\,000$, alors les valeurs de $t_{2000}$ seront supérieures à 2001, ce qui impossible.
Il n'existe donc aucune permutation fantastique si $n=2001$.

10. Un triangle équilatéral $ABC$ a des côtés de longueur 2. Un carré $PQRS$ est tel que le $P$ est situé sur le côté $AB$, $Q$ est situé sur le côté $BC$ et les sommets $R$ et $S$ sont situés sur le côté $AC$. On fait bouger les points $P$, $Q$, $R$ et $S$ de manière que $P$, $Q$ et $R$ demeurent sur les côtés du triangle, tandis que le point $S$ se déplace du côté $AC$ au côté $AB$ en passant par l'intérieur du triangle. Si les points $P$, $Q$, $R$ et $S$ forment continuellement les sommets d'un carré, démontrer que le chemin tracé par le point $S$ est un segment de droite parallèle au côté $BC$.




Dans cette solution, on établit que la distance du point $S$ à $BC$ est égale à $s(\sin\theta+\cos\theta)$ et on démontre que cette expression est constante.

***Solution***




Soit $\angle RQC = \theta$. Au point *S*, on abaisse une perpendiculaire à $BC$ jusqu'à *T* sur $BC$.
Donc $\angle PQB = 180° - 90° - \theta$, ou $\angle PQB = 90° - \theta$.
Soit *s* la longueur d'un côté du carré.
Au point *S*, on trace une droite parallèle à la base $BC$.
Au point *R*, on trace un segment $DE$, perpendiculaire à $BC$, de *D* sur $BC$ jusqu'à *E* sur la droite parallèle.
Au point *P*, on abaisse un segment perpendiculaire à $BC$, jusqu'au point F sur $BC$.
Dans le triangle $RQD$, on a $RD = s\sin\theta$.
Puisque $\angle QRD = 90° - \theta$, alors $\angle SRE = \theta$.
Dans le triangle $SER$, on a $ER = s\cos\theta$.
La distance de S à $BC$ est égale à : $RD + ER = s\sin\theta + s\cos\theta$.
Il faut démontrer que cette expression est constante.
Nous allons exprimer les longueurs $DC$, $DQ$, $TF$ et $FB$ en fonction de s.
Puisque le triangle $RDC$ est un triangle $30°$ - $60°$ - $90$, $\frac{DC}{RD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Puisque $RD = s\sin\theta$, alors $DC = \frac{1}{\sqrt{3}}(s\sin\theta)$, ou $DC = \frac{\sqrt{3}}{3}s\sin\theta$.
Dans le triangle $RDQ$, $\frac{QD}{RQ} = \cos\theta$, d'où $QD = s\cos\theta$.
Dans le triangle $PFQ$, $\sin\theta = \frac{FQ}{s}$ et $\cos\theta = \frac{PF}{s}$, d'où $FQ = s\sin\theta$ et $PF = s\cos\theta$.
Dans le triangle $PFB$, $\frac{BF}{PF} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $BF = \frac{1}{\sqrt{3}}s\cos\theta$ ou $BF = \frac{\sqrt{3}}{3}s\cos\theta$.
Puisque $DC + QD + FQ + BF = 2$, $\frac{\sqrt{3}}{3}s\sin\theta + s\cos\theta + s\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{3}s\cos\theta = 2$.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s\cos\theta + s\sin\theta) + (s\cos\theta + s\sin\theta) = 2$$

$$s\cos\theta + s\sin\theta = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)}$$

Donc $s\cos\theta + s\sin\theta$ est une constante et le chemin tracé par le point *S* est donc un segment de droite parallèle au côté $BC$.

**Remarque** Bon nombre de personnes nous ont fait part de l'impossibilité de résoudre le problème selon les données de l'énoncé. Si on lit bien l'énoncé, on doit conclure que les dimensions du carré *varient*, ce qui permet l'existence du carré pendant que les sommets bougent.