Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12^e – Sec. V)

pour les prix

The CENTRE for EDUCATION in MATHEMATICS and COMPUTING

Le mardi 18 avril 2000

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltd.

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

London Life, compagnie d'assurance-vie et La Great-West, compagnie d'assurance-vie

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES :

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci: .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT :

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci: .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

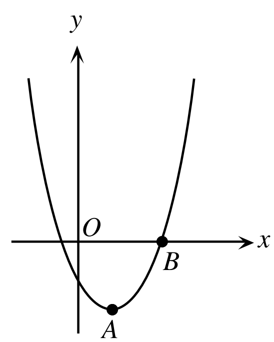
REMARQUES :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « 💡 », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points sera accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. À moins d'avis contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de nombres exacts tels que 4π et $2+\sqrt{7}$.

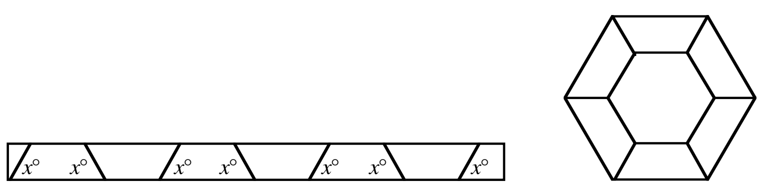
1. a) Si $x + 27^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}}$, quelle est la valeur de x?

b) La droite d'équation $y = ax + c$ passe par le point $(1, 5)$ et elle est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Quelle est la valeur de c?

c) La parabole d'équation $y = (x-2)^2 - 16$ a pour sommet A et elle croise l'axe des x au point B, comme l'indique le diagramme. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B.



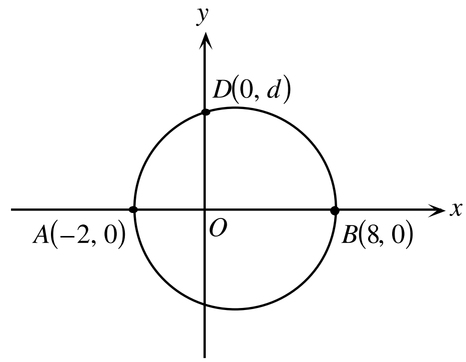
2. a) On a découpé six morceaux identiques d'une planche de bois, comme l'indique le premier diagramme. Chaque trait de scie a été fait à un angle de $x°$. Les morceaux sont ensuite rassemblés pour former un cadre hexagonal illustré dans le deuxième diagramme. Quelle est la valeur de x?



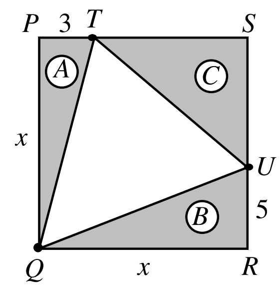
b) Si $\log_{10} x = 3 + \log_{10} y$, quelle est la valeur de $\frac{x}{y}$?

c) Si $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$, déterminer toutes les valeurs de l'expression $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

3. a) Le diagramme illustre un cercle de diamètre AB. Le cercle croise la partie positive de l'axe des y au point $D(0, d)$. Quelle est la valeur de d?



b) Le diagramme illustre un carré $PQRS$, ayant des côtés de longueur x. Le carré est subdivisé en quatre régions triangulaires de manière que l'aire de Ⓐ + l'aire de Ⓑ = l'aire de Ⓒ. Si $PT = 3$ et $RU = 5$, déterminer la valeur de x.



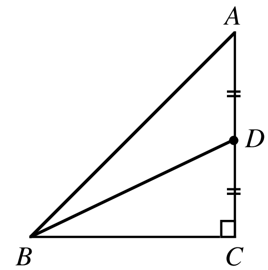
4. a) On jette un dé juste, dont les numéros 1, 2, 3, 4, 6 et 8 sont inscrits sur ses six faces. Après ce jet, si un numéro impair paraît sur la face supérieure, tous les numéros impairs sur le dé sont doublés; si un numéro pair paraît sur la face supérieure, tous les numéros pairs sont divisés par 2. Si on jette un tel dé deux fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir un 2 sur le deuxième jet?

b) Le tableau ci-dessous donne les résultats de fin de saison 1998 de sept équipes de la ligue de cricket d'Angleterre. À la fin de la saison, chaque équipe avait joué 17 matchs. Le nombre total de points remportés par chaque équipe est indiqué dans la dernière colonne. Chacune des V victoires rapporte v points, chacun des N matchs nuls rapporte n points, chacun des A lancers bonis rapporte a points et chacun des B bonis de batte rapporte b points, v, n, a et b étant des entiers strictement positifs. *Aucun point* n'est accordé pour une défaite. Déterminer les valeurs de v, n, a et b si le total des points est accordé selon la formule : $\text{Points} = v \times V + n \times N + a \times A + b \times B$.

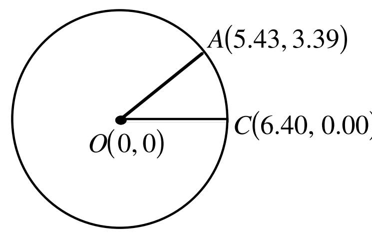
Résultats de fin de saison

	V	*Défaites*	*N*	*A*	*B*	*Points*
Sussex	6	7	4	30	63	201
Warks	6	8	3	35	60	200
Som	6	7	4	30	54	192
Derbys	6	7	4	28	55	191
Kent	5	5	7	18	59	178
Worcs	4	6	7	32	59	176
Glam	4	6	7	36	55	176

5. a) Dans le diagramme, on a $AD = DC$, $\sin \angle DBC = 0{,}6$ et $\angle ACB = 90°$. Quelle est la valeur de $\tan \angle ABC$?

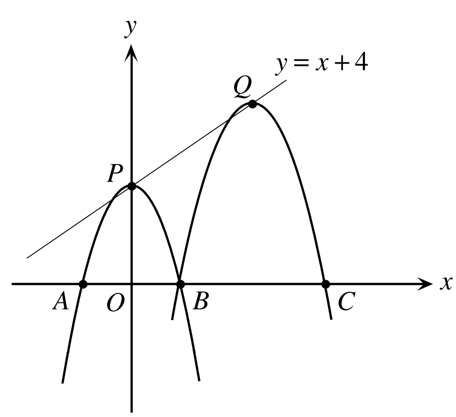


b) Le diagramme représente une coupe transversale de la Terre. Les axes de coordonnées sont placés pour que le centre de la Terre soit situé au point $O(0, 0)$. Le Cap Canaveral est situé au point $C(6{,}40; 0{,}00)$. Une navette spaciale est forcée d'atterrir sur une île au point $A(5{,}43; 3{,}39)$. Chaque unité représente 1000 km. Déterminer la distance entre l'île et le Cap Canaveral, telle que mesurée sur la surface courbe de la Terre. Exprimer la réponse aux 10 km près.



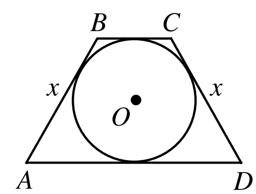
6. a) L'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ et $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$. Si x est un nombre positif tel que $x\lfloor x \rfloor = 17$, quelle est la valeur de x?

b) La parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ a pour sommet P et elle croise l'axe des x aux points A et B. La parabole subit une translation de manière que son sommet se promène le long de la droite d'équation $y = x + 4$ jusqu'au point Q. Dans cette position, la parabole croise l'axe des x aux points B et C. Déterminer les coordonnées du point C.



7. a) Un cube a des arêtes de longueur n, n étant un entier. Trois faces qui se rencontrent au même sommet sont peintes en rouge. On coupe ensuite le cube en n^3 petits cubes ayant des arêtes de longueur 1. Déterminer la valeur de n, sachant qu'exactement 125 de ces petits cubes n'ont aucune face rouge.

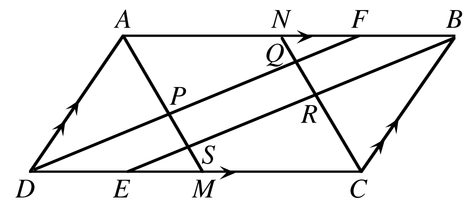
b) On considère un trapèze isocèle $ABCD$ ayant une aire de 80 unités carrées et tel que $AB = CD = x$. Un cercle de centre O et de rayon 4 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Déterminer la valeur de x.



8. On considère un parallélogramme $ABCD$, où $AB = a$ et $BC = b$, $a > b$. Les points d'intersection des bissectrices des angles du parallélogramme forment un quadrilatère $PQRS$.

a) Démontrer que $PQRS$ est un rectangle.

b) Démontrer que $PR = a - b$.



9. Une permutation des entiers 1, 2, ..., n est un classement de ces entiers dans un certain ordre. Par exemple, $(3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3)$ sont deux permutations des entiers 1, 2, 3. On dit qu'une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$ des entiers 1, 2, ..., n est *fantastique* si $a_1 + a_2 + ... + a_k$ est divisible par k, pour ***chaque*** valeur de k de 1 à n. Par exemple, $(3, 1, 2)$ est une permutation fantastique de 1, 2, 3 car 3 est divisible par 1, $3 + 1$ est divisible par 2 et $3 + 1 + 2$ est divisible par 3. Par contre, la permutation $(2, 1, 3)$ n'est pas fantastique car $2 + 1$ n'est pas divisible par 2.

a) Démontrer qu'il n'existe aucune permutation fantastique si $n = 2000$.

b) Existe-t-il une permutation fantastique si $n = 2001$? Expliquer sa réponse.

10. Un triangle équilatéral ABC a des côtés de longueur 2. Un carré $PQRS$ est tel que le P est situé sur le côté AB, Q est situé sur le côté BC et les sommets R et S sont situés sur le côté AC. On fait bouger les points P, Q, R et S de manière que P, Q et R demeurent sur les côtés du triangle, tandis que le point S se déplace du côté AC au côté AB en passant par l'intérieur du triangle. Si les points P, Q, R et S forment continuellement les sommets d'un carré, démontrer que le chemin tracé par le point S est un segment de droite parallèle au côté BC.