Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions
Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix
BANQUE NATIONALE DU CANADA

Partie A

1. La valeur de $\dfrac{4\times 4+4}{2\times 2-2}$ est :

(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 18

Solution

$$\frac{4\times 4+4}{2\times 2-2}=\frac{20}{2}$$
$$=10$$

RÉPONSE : (C)

2. Si $k=2$, alors $\left(k^3-8\right)(k+1)$ est égal à :

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) -6

Solution

Si $k=2$, $\left(k^3-8\right)(k+1)$
$$=\left(2^3-8\right)(2+1)$$
$$=0(3)$$
$$=0.$$

RÉPONSE : (A)

3. Si $4(\heartsuit)^2=144$, alors une valeur de $\heartsuit$ est :

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 18

Solution

$$4(\heartsuit)^2=144$$
$$\heartsuit^2=36$$
$$\heartsuit=\pm 6$$

RÉPONSE : (B)

4. Lequel des nombres suivants est un diviseur du nombre $\left(15+\sqrt{49}\right)$?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 11

Solution

$$15+\sqrt{49}=15+7$$
$$=22$$

Parmi les cinq choix, le seul diviseur de 22 est 11. RÉPONSE : (E)

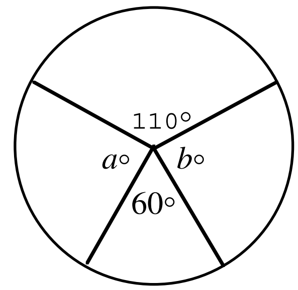
5. Si 10 % de 400 est diminué de 25, le résultat est égal à :

(**A**) 15 (**B**) 37,5 (**C**) 65 (**D**) 260 (**E**) 3975

Solution
10 % de 400 est égal à 40.
$40 - 25 = 15$ RÉPONSE : (A)

6. D'après le diagramme, $a + b$ est égal à :

(**A**) 10 (**B**) 85 (**C**) 110
(**D**) 170 (**E**) 190



Solution
Les mesures des angles au centre du cercle ont une somme de 360°.
Donc $a + b + 110 + 60 = 360$.
Donc $a + b = 190$. RÉPONSE : (E)

7. Si $2x - 1 = 5$ et $3y + 2 = 17$, alors la valeur de $2x + 3y$ est :

(**A**) 8 (**B**) 19 (**C**) 21 (**D**) 23 (**E**) 25

Solution
Puisque $2x - 1 = 5$, alors $2x = 6$.
Puisque $3y + 2 = 17$, alors $3y = 15$.
Donc : $2x + 3y = 6 + 15$
$= 21$ RÉPONSE : (C)

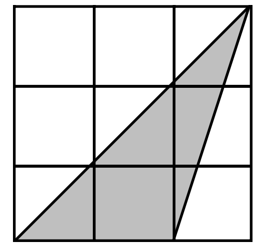
Remarque : Il n'était pas nécessaire de résoudre les deux équations au complet pour déterminer la réponse. Il suffisait de déterminer les valeurs de $2x$ et $3y$.

8. La moyenne des notes de quatre épreuves est égale à 60. Les trois premières notes sont 30, 55 et 65. Quelle est la quatrième note?

(**A**) 40 (**B**) 55 (**C**) 60 (**D**) 70 (**E**) 90

Solution
La somme des notes des quatre épreuves est égale à 4×60, ou 240. La somme des notes des trois premières épreuves est égale à 150. La quatrième note est égale à $240 - 150$, ou 90.
RÉPONSE : (E)

9. Chaque petit carré du diagramme mesure 1 cm sur 1 cm. L'aire de la région ombrée, en centimètres carrés, est égale à :



(**A**) 2,75 (**B**) 3 (**C**) 3,25
(**D**) 4,5 (**E**) 6

Solution
Le triangle ombré a une base de 2 cm et une hauteur de 3 cm.
Son aire est égale à $\frac{2\times 3}{2}$, ou 3 cm^2. RÉPONSE : (B)

10. $10+10^3$ est égal à :

(**A**) $2,0\times 10^3$ (**B**) $8,0\times 10^3$ (**C**) $4,0\times 10^1$ (**D**) $1,0\times 10^4$ (**E**) $1,01\times 10^3$

Solution

$$\begin{aligned} 10+10^3 &= 10+1000 \\ &= 1010 \\ &= 1,01\times 10^3 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

Partie B

11. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

(**A**) lundi (**B**) mardi (**C**) jeudi (**D**) vendredi (**E**) samedi

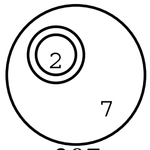
Solution
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $98=7\times 14$, nous serons un mercredi dans 98 jours. Dans 100 jours, nous serons donc un vendredi. RÉPONSE : (D)

12. Une montre à affichage digital indique 5:55. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau des chiffres qui sont tous identiques?

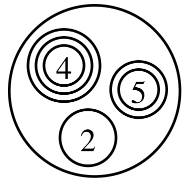
(**A**) 71 (**B**) 72 (**C**) 255 (**D**) 316 (**E**) 436

Solution
Les prochains chiffres identiques seront 11:11. Cela représente une différence de 316 minutes. (On remarque que les affichages 6:66, 7:77, etc., sont impossibles.) RÉPONSE : (D)

13. Au *Pays des ronds*, on représente les nombres 207 et 4520 de la façon suivante :

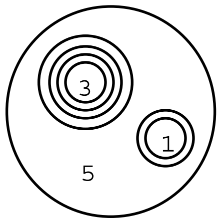


207



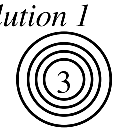
4520

Au *Pays des ronds*, quel nombre est représenté par le diagramme suivant?



(**A**) 30 105 (**B**) 30 150 (**C**) 3105 (**D**) 3015 (**E**) 315

Solution 1



$= 3 \times 10^4$
$= 30\,000$

$= 1 \times 10^2$
$= 100$

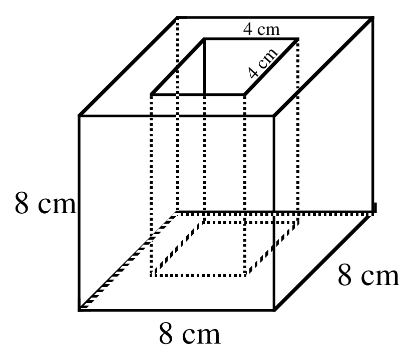
5 $= 5 \times 10^0$
$= 5$

Le nombre représenté est égal à $30\,000 + 100 + 5$, ou $30\,105$.

Solution 2
Puisqu'il y a quatre ronds autour du '3', cela représente le nombre 3×10^4, ou $30\,000$.
Le '5' représente 5 unités. Le seul nombre possible parmi les cinq choix est donc $30\,105$.

RÉPONSE : (A)

14. Le diagramme illustre un cube de 8 cm dans lequel on a creusé un trou ayant la forme d'un carré de 4 cm. Quel est le volume, en cm^3, du bloc troué?



(**A**) 64 (**B**) 128 (**C**) 256
(**D**) 384 (**E**) 448

Solution
Le volume du bloc troué, en cm^3, est égal à :
$8 \times 8 \times 8 - 8 \times 4 \times 4 = 384$ RÉPONSE : (D)

15. Pour combien de valeurs de *k* le nombre de quatre chiffres $7k52$ est-il divisible par 12?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution
Puisque $12 = 4 \times 3$, le nombre $7k52$ doit être divisible par 4 et par 3 pour être divisible par 12. Puisque le nombre 52, formé des deux derniers chiffres, est divisible par 4 alors le nombre $7k52$ est lui-même divisible par 4, peu importe la valeur de *k*. Pour que le nombre $7k52$ soit divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres, $7 + k + 5 + 2$, ou $14 + k$, soit divisible par 3. Les seules valeurs possibles de *k* sont 1, 4 et 7. On peut vérifier que les nombres 7152, 7452 et 7752 sont divisibles par 12.
Il y a donc 3 valeurs possibles de *k*. RÉPONSE : (D)

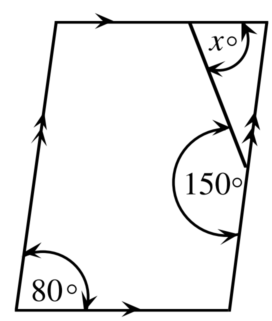
16. Lors d'une élection, Hubert a reçu 60 % des votes et Jeanne a reçu tous les autres votes. Si Hubert a gagné par 24 votes, combien de personnes ont voté?

(**A**) 40 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 100 (**E**) 120

Solution
Puisque Hubert a reçu 60 % des votes, Jeanne a reçu 40 % des votes. Il y a donc une différence de 20 % des votes entre eux, soit 24 votes.
Le nombre de personnes qui ont voté est donc égal à 5×24, ou 120. RÉPONSE : (E)

17. Le diagramme illustre un parallélogramme. Quelle est la valeur de *x*?

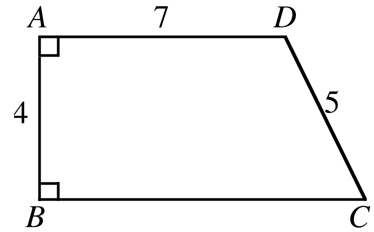
(**A**) 30 (**B**) 50 (**C**) 70
(**D**) 80 (**E**) 150



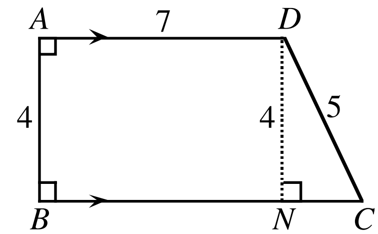
Solution
Dans le parallélogramme, l'angle opposé à l'angle de $80°$ mesure lui-même $80°$.
Le supplément de l'angle de $150°$ mesure $30°$.
Dans le triangle, on a donc $x° + 80° + 30° = 180°$.
Donc $x = 70$. RÉPONSE : (C)

18. Dans le diagramme, on a $AD < BC$. Quel est le périmètre de $ABCD$?

(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 27
(**D**) 28 (**E**) 30



Solution
Au point D, on abaisse une perpendiculaire DN à BC. Puisque $ADNB$ est un rectangle, alors $DN = 4$ et $BN = 7$. Puisque le triangle CDN est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $NC = 3$. On a donc $BC = 7 + 3$, ou 10.
Le périmètre est égal à $7 + 5 + 10 + 4$, ou 26.



RÉPONSE : (B)

19. On place les nombres 49, 29, 9, 40, 22, 15, 53, 33, 13 et 47 en paires de manière que la somme des nombres de chaque paire soit la même. Quel nombre forme une paire avec 15?

(**A**) 33 (**B**) 40 (**C**) 47 (**D**) 49 (**E**) 53

Solution 1
Si on place les nombres en ordre ascendant, on obtient 9, 13, 15, 22, 29, 33, 40, 47, 49, 53.
Pour obtenir des sommes égales, on forme les paires suivantes : $9 \leftrightarrow 53$, $13 \leftrightarrow 49$, $15 \leftrightarrow 47$, $22 \leftrightarrow 40$, $29 \leftrightarrow 33$.

Solution 2
La somme des 10 nombres est égale à 310. Chacune des cinq paires doit donc avoir une somme de $\frac{310}{5}$, ou 62. Le nombre 47 forme donc une paire avec 15. RÉPONSE : (C)

20. Le chiffre des unités du produit $(5+1)\left(5^3+1\right)\left(5^6+1\right)\left(5^{12}+1\right)$ est :

(**A**) 6 (**B**) 5 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

Solution
Si on développe les nombres 5^3, 5^6 et 5^{12}, le chiffre des unités de chaque nombre est 5. Si on développe les nombres $5+1$, 5^3+1, 5^6+1 et $5^{12}+1$, le chiffre des unités de chaque nombre est donc 6.
Si on multiplie deux nombres ayant chacun 6 pour chiffre des unités, le produit aura aussi 6 pour chiffre des unités. Le chiffre des unités du produit $(5+1)\left(5^3+1\right)\left(5^6+1\right)\left(5^{12}+1\right)$ est donc 6.

RÉPONSE : (A)

Partie C

21. Un nombre est *Beprisque* s'il est le seul nombre naturel situé entre un nombre premier et un carré parfait (p. ex., 10 est Beprisque, mais 12 ne l'est pas). Combien y a-t-il de nombres de deux chiffres qui sont Beprisque, incluant le nombre 10?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
On cherche les suites de trois entiers consécutifs du genre {C, B, P} ou {P, B, C}, où C est un carré parfait et P est un nombre premier. B est alors un nombre Beprisque.
Puisque B doit être un nombre de deux chiffres, $P \neq 2$. Donc P, qui est un nombre premier, doit être impair. C doit aussi être impair, puisqu'il est deux de plus ou deux de moins que P.
On examine les possibilités à partir des carrés parfaits impairs 9, 25, 49 et 81 : {9, **10**, 11}, {23, **24**, 25}, {25, 26, 27}, {47, **48**, 49}, {49, 50, 51}, {79, **80**, 81}, {81, **82**, 83}
Les nombres Beprisque sont en caractères gras. Il y en a cinq. RÉPONSE : (E)

22. Si $w = 2^{129} \times 3^{81} \times 5^{128}$, $x = 2^{127} \times 3^{81} \times 5^{128}$, $y = 2^{126} \times 3^{82} \times 5^{128}$ et $z = 2^{125} \times 3^{82} \times 5^{129}$, alors ces nombres, placés en ordre du plus petit au plus grand, sont :

(**A**) w, x, y, z (**B**) x, w, y, z (**C**) x, y, z, w (**D**) z, y, x, w (**E**) x, w, z, y

Solution
Le plus grand commun diviseur des quatre nombres donnés est $k = 2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}$.
On écrit les quatre nombres sous la forme suivante, ce qui permet de les comparer :

$$w = 2^4\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \quad \text{ou} \quad w = 16k,$$
$$x = 2^2\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \quad \text{ou} \quad x = 4k,$$
$$y = 2 \cdot 3\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \quad \text{ou} \quad y = 6k$$
$$z = 3 \cdot 5\left(2^{125} \times 3^{81} \times 5^{128}\right), \quad \text{ou} \quad z = 15k.$$

Donc $x < y < z < w$. RÉPONSE : (C)

23. Alain et Brigitte doivent se rendre à la ville voisine à une distance de 22,5 km. Ils partagent une bicyclette et doivent arriver en même temps. Brigitte part à bicyclette à une vitesse de 8 km/h. Plus tard, elle laisse la bicyclette et se met à marcher à une vitesse de 5 km/h. Alain marche d'abord à une vitesse de 4 km/h, puis en arrivant à la bicyclette, se met à pédaler à une vitesse de 10 km/h. Pendant combien de minutes la bicyclette a-t-elle été laissée de côté?

(**A**) 60 (**B**) 75 (**C**) 84 (**D**) 94 (**E**) 109

Solution
Dans ce genre de problème, il est important d'identifier une égalité dans l'énoncé. Puisque Alain et Brigitte doivent arriver en même temps, on a :

temps mis par Alain (pour se rendre à destination) = temps mis par Brigitte

Soit x la distance parcourue par Brigitte à bicyclette.

Dans le diagramme suivant, P est le point de départ, Q est l'endroit où la bicyclette est laissée et R est le point d'arrivée.

Alain parcourt les x km de P à Q à pied, à une vitesse de 4 km/h. Il met $\frac{x}{4}$ heures.

Il parcourt les $(22,5-x)$ km de Q à R à bicyclette, à une vitesse de 10 km/h.

Il met $\frac{22,5-x}{10}$ heures.

Brigitte parcourt les x km de P à Q à bicyclette, à une vitesse de 8 km/h. Elle met $\frac{x}{8}$ heures.

Elle parcourt les $(22,5-x)$ km de Q à R à pied, à une vitesse de 5 km/h.

Elle met $\frac{22,5-x}{5}$ heures.

L'égalité devient donc $\frac{x}{4}+\frac{22,5-x}{10}=\frac{x}{8}+\frac{22,5-x}{5}$.

$$40\left(\frac{x}{4}+\frac{22,5-x}{10}\right)=40\left(\frac{x}{8}+\frac{22,5-x}{5}\right)$$
$$10x+90-4x=5x+180-8x$$
$$6x+90=-3x+180$$
$$9x=90$$
$$x=10$$

Brigitte a donc utilisé la bicyclette pendant $\frac{10}{8}$, ou 1,25 heure. Alain a marché pendant $\frac{10}{4}$, ou 2,5 heures avant de prendre la bicyclette. La bicyclette a donc été laissée de côté pendant 1,25 heure, ou 75 minutes.

RÉPONSE : (B)

24. On forme un nombre en utilisant les chiffres 1, 2, ..., 9. N'importe quel chiffre peut être utilisé plus d'une fois, mais deux chiffres en positions adjacentes doivent être différents. Lorsque deux chiffres paraissent en positions adjacentes, ces deux chiffres ne peuvent plus paraître ensemble dans le même ordre. Si on forme le plus grand nombre possible de cette façon, combien a-t-il de chiffres?

(**A**) 72 (**B**) 73 (**C**) 144 (**D**) 145 (**E**) 91

Solution

Il est possible de former 9×8, ou 72 paires différentes de chiffres, chaque paire étant composée de chiffres différents.

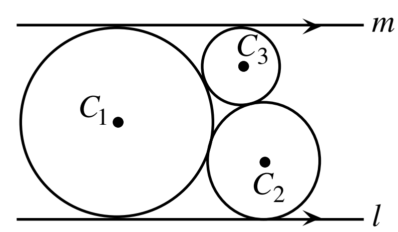
Or un nombre de n chiffres contient $(n-1)$ paires de chiffres en positions adjacentes. Par exemple, le nombre de 5 chiffres, 98712, contient 4 paires de chiffres en positions adjacentes, soit 98, 87, 71 et 12.

Donc le plus grand nombre pouvant contenir 72 paires différentes de chiffres en positions adjacentes ne peut avoir plus de 73 chiffres, autrement il y aurait des répétions. Un tel nombre existe-t-il? Oui. Le plus grand est le suivant :

98 97 96 95 94 93 92 91 87 86 85 84 83 82 81 76 75 74 73 72 71 65 64 63 62 61
54 53 52 51 43 42 41 32 31 21 9.

On peut vérifier qu'il contient 73 chiffres. RÉPONSE : (B)

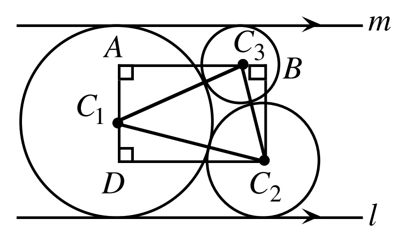
25. Deux cercles, C_1 et C_2, se touchent extérieurement. La droite l est une tangente commune. La droite m est parallèle à l et touche les deux cercles C_1 et C_3. Les trois cercles sont tangents l'un à l'autre. Si C_2 a un rayon de 9 et C_3 a un rayon de 4, quel est le rayon de C_1?



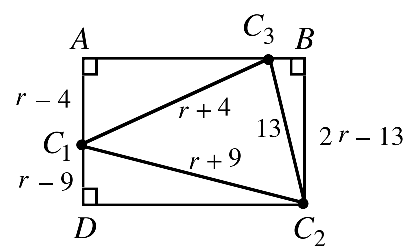
(**A**) 10.4 (**B**) 11 (**C**) $8\sqrt{2}$
(**D**) 12 (**E**) $7\sqrt{3}$

Solution

On joint d'abord les centres pour former le triangle $C_1C_2C_3$. Chaque segment joignant deux centres passe par le point de tangence des deux cercles. Sa longueur est donc égale à la somme des rayons des deux cercles.



On construit ensuite le rectangle ABC_2D illustré dans le diagramme. Soit r le rayon du cercle de centre C_1. Alors $C_1C_2 = r + 9$, $C_1C_3 = r + 4$ et $C_2C_3 = 13$.



On peut ensuite représenter certaines longueurs comme dans le diagramme en comparant les rayons des cercles. Par exemple, la longueur C_1D est égale au rayon du grand cercle moins le rayon du cercle de centre C_2. Donc $C_1D = r - 9$.

Un raisonnement semblable donne $C_1A = r - 4$ et $BC_2 = 2r - 13$.

Puisque les triangles suivants sont rectangles, on utilise le théorème de Pythagore.

Dans le triangle AC_3C_1 :

$$\begin{aligned}(C_3A)^2 &= (r+4)^2 - (r-4)^2 \\ &= 16r \\ C_3A &= 4\sqrt{r}.\end{aligned}$$

Dans le triangle DC_1C_2 :

$$\begin{aligned}(DC_2)^2 &= (r+9)^2 - (r-9)^2 \\ &= 36r \\ DC_2 &= 6\sqrt{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC_3 &= DC_2 - C_3A \\ &= 2\sqrt{r}\end{aligned}$$

Dans le triangle BC_3C_2 :

$$(2r-13)^2+\left(2\sqrt{r}\right)^2=13^2$$
$$4r^2-52r+169+4r=169$$
$$4r^2-48r=0$$
$$4r(r-12)=0$$

Donc $r=0$ ou $r=12$.

On rejète $r=0$ d'après l'énoncé. Donc $r=12$. RÉPONSE : (D)