



# Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation  
en mathématiques et en informatique,  
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

## *1999 Solutions* *Concours Fermat* (11<sup>e</sup> - Sec. V)

pour les prix



**BANQUE NATIONALE DU CANADA**

**Partie A**

1. La valeur de  $(\sqrt{25} - \sqrt{9})^2$  est :

- (A) 26                      (B) 16                      (C) 34                      (D) 8                      (E) 4

*Solution*

$$\begin{aligned} (\sqrt{25} - \sqrt{9})^2 &= (5 - 3)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

2. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

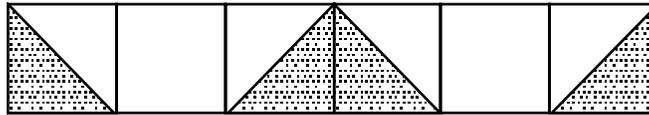
- (A) lundi                      (B) mardi                      (C) jeudi                      (D) vendredi                      (E) samedi

*Solution*

Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que  $98 = 7 \times 14$ , nous serons un mercredi dans 98 jours. Dans 100 jours, nous serons donc un vendredi.

RÉPONSE : (D)

3. La figure illustrée est formée de six carrés. Quelle fraction de la figure est ombrée?



- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{1}{3}$                       (C)  $\frac{1}{4}$                       (D)  $\frac{2}{5}$                       (E)  $\frac{2}{3}$

*Solution*

La figure est formée de six carrés. Quatre demi-carrés, soit l'équivalent de deux carrés, sont ombrés.

Donc  $\frac{1}{3}$  de la figure est ombrée.

RÉPONSE : (B)

4. Lorsqu'on fait tourner un tourne-vis sur un angle de  $90^\circ$ , une vis pénètre dans un morceau de bois sur une profondeur de 3 mm. Combien faut-il de tours complets du tourne-vis pour insérer une vis de 36 mm dans le bois?

- (A) 3                      (B) 4                      (C) 6                      (D) 9                      (E) 12

*Solution*

Un tour complet du tourne-vis, soit un angle de  $360^\circ$ , fera pénétrer la vis sur une profondeur de 12 mm.

Il faut donc trois tours complets pour insérer une vis de 36 mm dans le bois.

RÉPONSE : (A)

5. Une valeur de  $x$  pour laquelle  $(5 - 3x)^5 = -1$  est :

- (A)  $\frac{4}{3}$                       (B) 0                      (C)  $\frac{10}{3}$                       (D)  $\frac{5}{3}$                       (E) 2

*Solution*

Puisque  $(-1)^5 = -1$ , alors  $5 - 3x = -1$  d'où  $x = 2$ .

RÉPONSE : (E)

6. Le nombre qui est 6 de moins que le double du carré de 4 est :

- (A) -26                      (B) 10                      (C) 26                      (D) 38                      (E) 58

*Solution*

$$2(4)^2 - 6 = 26$$

RÉPONSE : (C)

7. Dans la famille Martin, chacun des cinq enfants reçoit une allocation hebdomadaire. L'allocation moyenne des trois plus jeunes est de 8 \$. Les deux plus vieux reçoivent une allocation moyenne de 13 \$. Quelle somme est déboursée à chaque semaine pour les allocations des enfants?

- (A) 50 \$                      (B) 52,50 \$                      (C) 105 \$                      (D) 21 \$                      (E) 55 \$

*Solution*

La somme déboursée est égale à  $3 \times 8 \$ + 2 \times 13 \$$ , ou 50 \$. RÉPONSE : (A)

8. Une montre à affichage digital indique 5:55. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau des chiffres qui sont tous identiques?

- (A) 71                      (B) 72                      (C) 255                      (D) 316                      (E) 436

*Solution*

Les prochains chiffres identiques seront 11:11. Cela représente une différence de 316 minutes. (On remarque que les affichages 6:66, 7:77, etc., sont impossibles.)

RÉPONSE : (D)

9. Lors d'une élection, Hubert a reçu 60 % des votes et Jeanne a reçu tous les autres votes. Si Hubert a gagné par 24 votes, combien de personnes ont voté?

- (A) 40                      (B) 60                      (C) 72                      (D) 100                      (E) 120

*Solution*

Puisque Hubert a reçu 60 % des votes, Jeanne a reçu 40 % des votes. Il y a donc une différence de 20 % des votes entre eux, soit 24 votes.

Le nombre de personnes qui ont voté est donc égal à  $5 \times 24$ , ou 120.

RÉPONSE : (E)

10. Si on choisit les valeurs de  $x$  et de  $y$  dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, 5, 10\}$ , la plus grande valeur possible de l'expression  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  est :

- (A) 2                      (B)  $12\frac{1}{2}$                       (C)  $10\frac{1}{10}$                       (D)  $2\frac{1}{2}$                       (E) 20

*Solution*

Il faut choisir la plus grande valeur possible pour  $x$  et la plus petite valeur possible pour  $y$ , de manière que  $\frac{x}{y}$  soit aussi grand que possible. L'inverse,  $\frac{y}{x}$ , sera inférieure à 1 et aura peu de conséquence sur

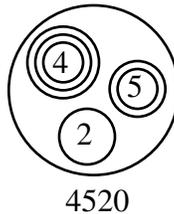
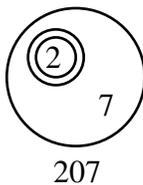
la somme. Les meilleurs choix sont donc  $x=10$  et  $y=1$ . On aura alors  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{1} + \frac{1}{10}$ , ou

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 10\frac{1}{10}.$$

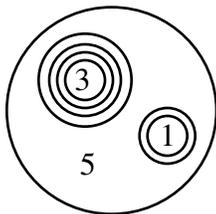
RÉPONSE : (C)

## Partie B

11. Au *Pays des ronds*, on représente les nombres 207 et 4520 de la façon suivante :



Au *Pays des ronds*, quel nombre est représenté par le diagramme suivant?



- (A) 30 105                      (B) 30 150                      (C) 3105                      (D) 3015                      (E) 315

*Solution 1*

$$\begin{aligned} \text{③} &= 3 \times 10^4 \\ &= 30\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①} &= 1 \times 10^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \times 10^0 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Le nombre représenté est égal à  $30\,000 + 100 + 5$ , ou 30 105.

*Solution 2*

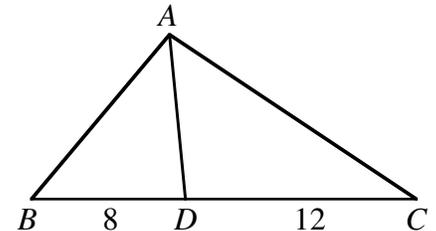
Puisqu'il y a quatre ronds autour du '3', cela représente le nombre  $3 \times 10^4$ , ou 30 000.

Le '5' représente 5 unités. Le seul nombre possible parmi les cinq choix est donc 30 105.

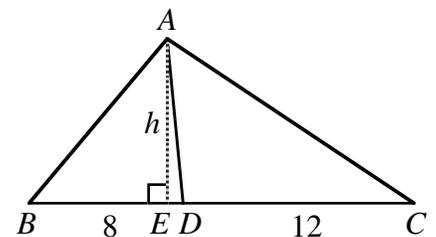
RÉPONSE : (A)

12. Le triangle  $ABC$  a une aire de 60 unités carrées. Si  $BD = 8$  unités et  $DC = 12$  unités, l'aire du triangle  $ABD$ , en unités carrées, est égale à :

(A) 24                      (B) 40                      (C) 48  
(D) 36                      (E) 6

*Solution 1*

Les triangles  $ABC$  et  $ABD$  ont la même hauteur  $AE = h$ . L'aire de chaque triangle est donc proportionnelle à la longueur de sa base. Puisque le triangle  $ABC$  a une aire de 60 unités carrées, l'aire du triangle  $ABD$  est égale à  $\frac{8}{20} \times 60$ , ou 24 unités carrées.

*Solution 2*

Soit  $h$  la hauteur des triangles  $ABC$  et  $ABD$ .

Puisque le triangle  $ABC$  a une aire de 60 unités carrées, alors :

$$\frac{20 \times h}{2} = 60$$

$$h = 6$$

Donc l'aire du triangle  $ABD$  est égale à  $\frac{8 \times 6}{2}$ , ou 24 unités carrées.

RÉPONSE : (A)

13. Pépin a passé quatre examens, chacun sur 100. Il a obtenu une moyenne de 88. Quelle est la note la plus basse qu'il ait pu obtenir sur un de ces examens?

(A) 88                      (B) 22                      (C) 52                      (D) 0                      (E) 50

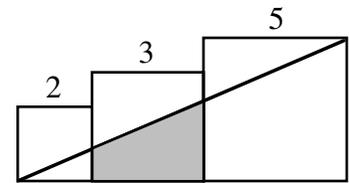
*Solution*

Puisque Pépin a obtenu une moyenne de 88, il a obtenu un total de  $4 \times 88$ , ou 352 points. La note la plus basse proviendrait donc de la situation où il reçoit trois notes de 100 et une note de 52.

RÉPONSE : (C)

14. Le diagramme illustre trois carrés dont les dimensions sont indiquées. Quelle est l'aire du quadrilatère ombré?

- (A)  $\frac{21}{4}$                       (B)  $\frac{9}{2}$                       (C) 5  
 (D)  $\frac{15}{4}$                       (E)  $\frac{25}{4}$



*Solution 1*

Dans cette solution, on fait appel aux triangles semblables. Soit les points indiqués sur le diagramme. On calculera les longueurs  $EB$  et  $FC$ , ce qui permettra de calculer l'aire du trapèze  $BCFE$ . Les triangles  $ACF$  et  $ADG$  sont semblables, puisque leurs angles correspondants sont congruents.

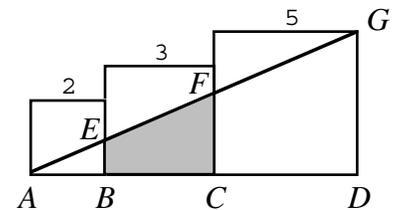
Donc  $\frac{FC}{GD} = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{10}$ , ou  $\frac{FC}{GD} = \frac{1}{2}$ .

Donc  $FC = \frac{1}{2}GD$ , ou  $FC = \frac{5}{2}$ .

De même, les triangles  $ABE$  et  $ACF$  sont semblables. Donc  $\frac{EB}{FC} = \frac{2}{5}$ .

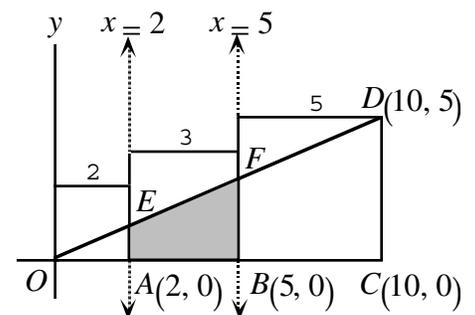
Donc  $EB = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\right)$ , ou  $EB = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{L'aire du trapèze } BCFE &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right) \times 3 \\ &= \frac{21}{4}. \end{aligned}$$



*Solution 2*

On ajoute un repère cartésien. La droite  $OD$  a pour équation  $y = \frac{1}{2}x$ . Puisque les points  $E(2, y_1)$  et  $F(5, y_2)$  sont sur cette droite, leurs coordonnées vérifient l'équation. Donc  $y_1 = 1$  et  $y_2 = \frac{5}{2}$ . Donc  $AE = 1$  et  $BF = \frac{5}{2}$ . On continue comme dans la solution 1.



RÉPONSE : (A)

15. Si l'expression  $(a+b+c+d+e+f+g+h+i)^2$  est développée et réduite, combien y aura-t-il de termes différents dans la réponse?

- (A) 36                      (B) 9                      (C) 45                      (D) 81                      (E) 72

*Solution*

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i) \overset{\text{Parenthèse 1}}{(a+b+c+d+e+f+g+h+i)} \overset{\text{Parenthèse 2}}{(a+b+c+d+e+f+g+h+i)}$$

Il faut d'abord multiplier le  $a$  de la parenthèse 1 par chacun des termes de la parenthèse 2. On obtient 9 termes. Ensuite il faut multiplier le  $b$  de la parenthèse 1 par tous les termes de la parenthèse 2 à partir de  $b$  car  $b \times a$  ne donnerait pas un nouveau terme. On obtient 8 nouveaux termes. On continue de cette façon jusqu'à la fin, alors que l'on multiplie le  $i$  de la parenthèse 1 par le  $i$  de la parenthèse 2. Le nombre de termes différents est donc égal à  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ , ou 45.

RÉPONSE : (C)

16. Si les équations  $px + 2y = 7$  et  $3x + qy = 5$  représentent la même droite, la valeur de  $p$  est :

- (A) 5                      (B) 7                      (C) 21                      (D)  $\frac{21}{5}$                       (E)  $\frac{10}{7}$

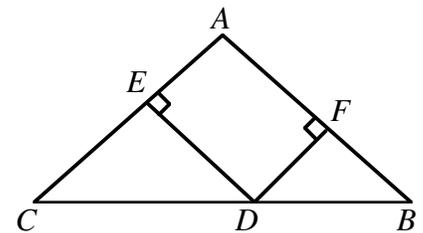
*Solution*

Si on multiplie les membres de la première équation par 5, on obtient  $5px + 10y = 35$ . Si on multiplie les membres de la deuxième équation par 7, on obtient  $21x + 7qy = 35$ . En comparant les coefficients, on obtient  $5p = 21$  ou  $p = \frac{21}{5}$ .

RÉPONSE : (D)

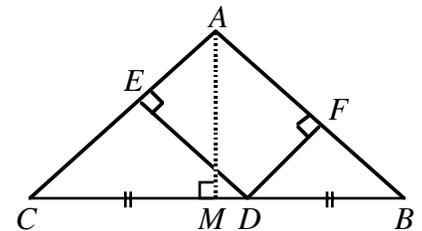
17. Dans le triangle  $ABC$ , on a  $AC = AB = 25$  et  $BC = 40$ .  $D$  est un point sur  $BC$ . Au point  $D$ , on abaisse des perpendiculaires qui rencontrent  $AC$  en  $E$  et  $AB$  en  $F$ .  $DE + DF$  est égal à :

- (A) 12                      (B) 35                      (C) 24  
 (D) 25                      (E)  $\frac{35}{2}\sqrt{2}$



*Solution*

On trace la hauteur  $AM$ . Puisque le triangle  $ABC$  est isocèle,  $M$  est le milieu de  $CB$ , d'où  $CM = MB = 20$ . Puisque le triangle  $ACM$  est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir  $AM = \sqrt{25^2 - 20^2}$ , ou  $AM = 15$ .



On joint  $A$  et  $D$ . L'aire du triangle  $ABC$  est égale à  $\frac{1}{2}(BC)(AM)$ . Elle est aussi égale à la somme des aires des

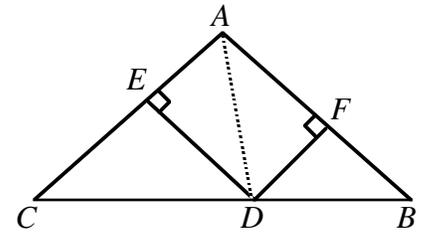
triangles  $ACD$  et  $ADB$ . On a donc :

$$\frac{1}{2}(40)(15) = \frac{1}{2}(25)(ED) + \frac{1}{2}(25)(DF)$$

$$(40)(15) = (25)(ED) + (25)(DF)$$

$$600 = (25)(ED) + (25)(DF)$$

$$ED + DF = 24$$



RÉPONSE : (C)

18. Si  $P$  et  $Q$  sont des entiers de 1 à 9 inclusivement, le nombre de solutions  $(P, Q)$  de l'équation

$$\frac{P}{Q} - \frac{Q}{P} = \frac{P+Q}{PQ}$$

est égal à :

- (A) 1                      (B) 8                      (C) 16                      (D) 72                      (E) 81

*Solution*

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{P}{Q} - \frac{Q}{P} = \frac{P+Q}{PQ}$$

$$\frac{P^2 - Q^2}{PQ} = \frac{P+Q}{PQ}$$

$$\frac{(P-Q)(P+Q)}{PQ} = \frac{P+Q}{PQ}$$

Donc  $P - Q = 1$ ,  $PQ \neq 0$  et  $P + Q \neq 0$ .

Les solutions sont  $(2, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(4, 3)$ , ...,  $(9, 8)$ .

Il y en a huit.

RÉPONSE : (B)

19. Le parallélogramme  $ABCD$  est formé de quatre triangles équilatéraux dont les côtés mesurent 1. La diagonale  $AC$  a une longueur de :

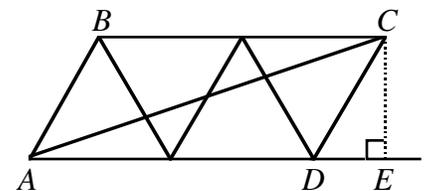
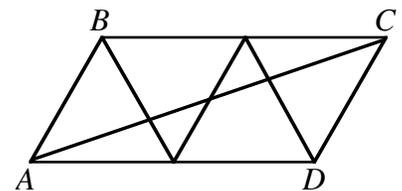
- (A)  $\sqrt{5}$                       (B)  $\sqrt{7}$                       (C) 3  
 (D)  $\sqrt{3}$                       (E)  $\sqrt{10}$

*Solution*

On trace la hauteur  $CE$  du parallélogramme.

Le triangle  $CDE$  est donc un triangle  $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ , avec

$\angle CDE = 60^\circ$  et  $CD = 1$ . Donc  $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $DE = \frac{1}{2}$ .



Puisque le triangle  $AEC$  est rectangle et que  $AE = \frac{5}{2}$  et  $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir  $AC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$ , ou  $AC = \sqrt{7}$ .

RÉPONSE : (B)

20. On définit  $a_1 = \frac{1}{1-x}$ ,  $a_2 = \frac{1}{1-a_1}$  et  $a_n = \frac{1}{1-a_{n-1}}$ , où  $n \geq 2$ ,  $x \neq 1$  et  $x \neq 0$ . Alors  $a_{107}$  est égal à :

- (A)  $\frac{1}{1-x}$       (B)  $x$       (C)  $-x$       (D)  $\frac{x-1}{x}$       (E)  $\frac{1}{x}$

*Solution*

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{1-x} & a_2 &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} & a_3 &= \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} & a_4 &= \frac{1}{1-x} \\
 & & &= \frac{(1-x)(1)}{(1-x)\left(1-\frac{1}{1-x}\right)} & &= \frac{x(1)}{x\left(1-\frac{x-1}{x}\right)} & & \\
 & & &= \frac{1-x}{1-x-1} & &= \frac{x}{x-(x-1)} & & \\
 & & &= \frac{1-x}{-x} & &= x & & \\
 & & &= \frac{x-1}{x} & & & & 
 \end{aligned}$$

Puisque  $a_1 = a_4$ , on conclut que  $a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a_{3n-2} = a_{106}$ .

De même,  $a_2 = a_5 = a_8 = \dots = a_{3n-1} = a_{107}$  lorsque  $n = 36$ .

Puisque  $a_2 = \frac{x-1}{x}$ , alors  $a_{107} = \frac{x-1}{x}$ .

RÉPONSE : (D)

## Partie C

21. Combien d'entiers peut-on exprimer comme une somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble  $\{4, 7, 10, 13, \dots, 46\}$ ?

- (A) 45      (B) 37      (C) 36      (D) 43      (E) 42

*Solution*

Chacun des nombres de l'ensemble est de la forme  $1+3n$ , où  $n = 1, 2, 3, \dots, 15$ . La somme de trois nombres distincts sera donc de la forme  $3+3k+3l+3m$  ou  $3(1+k+l+m)$ ,  $k, l$  et  $m$  étant choisis dans l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ . Le problème est donc équivalent au problème suivant qui est plus facile : « Combien d'entiers différents peut-on former en additionnant trois nombres de l'ensemble  $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$  ? »

La plus petite somme est  $1 + 2 + 3$ , ou 6 et la plus grande somme est  $13 + 14 + 15$ , ou 42.

Il est possible d'obtenir chaque somme de 6 à 42 :

a) en remplaçant un des entiers par l'entier suivant pour augmenter la somme de 1 ou

b) en remplaçant un des entiers par l'entier précédent pour diminuer la somme de 1.

Le nombre total de sommes distinctes est donc égal à  $42 - 5$ , ou 37.

RÉPONSE : (B)

22. Soit  $x^2 + ax + 48 = (x + y)(x + z)$  et  $x^2 - 8x + c = (x + m)(x + n)$ , où  $y, z, m$  et  $n$  sont des entiers entre  $-50$  et  $50$ . La valeur maximale de  $ac$  est :

(A) 343

(B) 126

(C) 52 234

(D) 784

(E) 98 441

*Solution*

D'après l'énoncé, les trinômes  $x^2 + ax + 48$  et  $x^2 - 8x + c$  peuvent être factorisés.

On considère d'abord les factorisations possibles de 48 et les valeurs de  $a$  qu'elles produisent.

<i>Factorisations possibles de 48</i>	<i>Valeurs de a</i>
$1 \times 48, -1 \times -48$	49, -49
$2 \times 24, -2 \times -24$	26, -26
$3 \times 16, -3 \times -16$	19, -19
$4 \times 12, -4 \times -12$	16, -16
$6 \times 8, -6 \times -8$	14, -14

On considère ensuite les factorisations possibles de  $x^2 - 8x + c$ , ainsi que les valeurs de  $c$  qu'elles produisent.

<i>Factorisations possibles</i>	<i>Valeurs de c</i>
$(x - 49)(x + 41)$	$-49 \times 41 = -2009$
$(x - 48)(x + 40)$	$-48 \times 40 = -1920$
$\vdots$	$\vdots$
$(x - 9)(x + 1)$	$-9 \times 1 = -9$
$(x - 8)(x + 0)$	0

En comparant ces valeurs, on voit que la valeur maximale de  $ac$  est  $-49 \times -2009$ , ou 98 441.

RÉPONSE : (E)

23. La somme des valeurs de  $x$  qui vérifient l'équation  $(x^2 - 5x + 5)^{x^2 + 4x - 60} = 1$  est égale à :

(A) -4

(B) 3

(C) 1

(D) 5

(E) 6

*Solution*

On peut considérer trois cas.

*1<sup>er</sup> cas* La base est égale à 1.

On a alors  $x^2 - 5x + 5 = 1$ .

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Ces deux valeurs de  $x$  vérifient l'équation donnée.

2<sup>e</sup> cas L'exposant est égal à 0.

On a alors  $x^2 + 4x - 60 = 0$ .

$$(x + 10)(x - 6) = 0$$

$$x = -10 \text{ ou } x = 6$$

On peut vérifier que  $x = -10$  et  $x = 6$  ne sont pas des racines de  $x^2 - 5x + 5 = 0$ , ce qui fait que nous n'avons pas la forme indéterminée  $0^0$ .

3<sup>e</sup> cas La base est égale à  $-1$  et l'exposant est pair.

On a alors  $x^2 - 5x + 5 = -1$  et  $x^2 + 4x - 60$  est pair.

$$x^2 - 5x + 5 = -1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

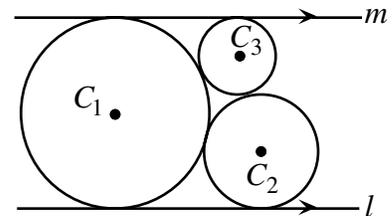
Si  $x = 2$ , alors  $x^2 - 4x - 60$  est pair et  $x = 2$  est donc une solution.

Si  $x = 3$ , alors  $x^2 - 4x - 60$  est impair et  $x = 3$  *n'est pas* une solution.

La somme des solutions est  $1 + 4 - 10 + 6 + 2$ , ou 3.

RÉPONSE : (B)

24. Deux cercles,  $C_1$  et  $C_2$ , se touchent extérieurement. La droite  $l$  est une tangente commune. La droite  $m$  est parallèle à  $l$  et touche les deux cercles  $C_1$  et  $C_3$ . Les trois cercles sont tangents l'un à l'autre. Si  $C_2$  a un rayon de 9 et  $C_3$  a un rayon de 4, quel est le rayon de  $C_1$ ?

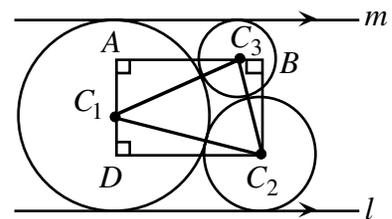


- (A) 10,4                      (B) 11                      (C)  $8\sqrt{2}$   
 (D) 12                      (E)  $7\sqrt{3}$

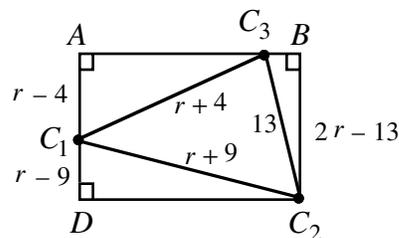
*Solution*

On joint d'abord les centres pour former le triangle  $C_1C_2C_3$ . Chaque segment joignant deux centres passe par le point de tangence des deux cercles. Sa longueur est donc égale à la somme des rayons des deux cercles.

On construit ensuite le rectangle  $ABC_2D$  illustré dans le diagramme. Soit  $r$  le rayon du cercle de centre  $C_1$ . Alors  $C_1C_2 = r + 9$ ,  $C_1C_3 = r + 4$  et  $C_2C_3 = 13$ .



On peut ensuite représenter certaines longueurs comme dans le diagramme en comparant les rayons des cercles. Par exemple, la longueur  $C_1D$  est égale au rayon du grand cercle moins le rayon du cercle de centre  $C_2$ . Donc  $C_1D = r - 9$ .



Un raisonnement semblable donne  $C_1A = r - 4$  et  $BC_2 = 2r - 13$ .

Puisque les triangles suivants sont rectangles, on utilise le théorème de Pythagore.

Dans le triangle  $AC_3C_1$  :

$$\begin{aligned} (C_3A)^2 &= (r+4)^2 - (r-4)^2 \\ &= 16r \\ C_3A &= 4\sqrt{r}. \end{aligned}$$

Dans le triangle  $DC_1C_2$  :

$$\begin{aligned} (DC_2)^2 &= (r+9)^2 - (r-9)^2 \\ &= 36r \\ DC_2 &= 6\sqrt{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC_3 &= DC_2 - C_3A \\ &= 2\sqrt{r} \end{aligned}$$

Dans le triangle  $BC_3C_2$  :

$$\begin{aligned} (2r-13)^2 + (2\sqrt{r})^2 &= 13^2 \\ 4r^2 - 52r + 169 + 4r &= 169 \\ 4r^2 - 48r &= 0 \\ 4r(r-12) &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $r = 0$  ou  $r = 12$ .

On rejète  $r = 0$  d'après l'énoncé. Donc  $r = 12$ .

RÉPONSE : (D)

25. Sachant que  $n$  est un entier, pour combien de valeurs de  $n$  l'expression  $\frac{2n^2 - 10n - 4}{n^2 - 4n + 3}$  donnera-t-elle un entier?

- (A) 9                      (B) 7                      (C) 6                      (D) 4                      (E) 5

*Solution*

On divise d'abord  $2n^2 - 10n - 4$  par  $n^2 - 4n + 3$ .

$$\begin{array}{r|l} 2n^2 - 10n - 4 & n^2 - 4n + 3 \\ \hline 2n^2 - 8n + 6 & \\ \hline -2n - 10 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} n^2 - 4n + 3 \overline{) 2n^2 - 10n - 4} \\ \underline{2n^2 - 8n + 6} \\ -2n - 10 \end{array}$$

On peut donc écrire l'expression donnée sous la forme

$$\frac{2n^2 - 10n - 4}{n^2 - 4n + 3} = 2 + \frac{-2n - 10}{n^2 - 4n + 3} = 2 - \frac{2n + 10}{n^2 - 4n + 3}.$$

Il faut donc déterminer le nombre de valeurs de  $n$  pour lesquelles l'expression  $\frac{2n + 10}{n^2 - 4n + 3}$  donnera un entier.

Pour que cette expression donne un entier, il faut que  $|n^2 - 4n + 3| \leq |2n + 10|$  et que  $n^2 - 4n + 3 \neq 0$ . Puisque  $n^2 - 4n + 3 = (n - 1)(n - 3)$ , la seule valeur négative de cette expression est  $-1$ , lorsque  $n = 2$ .

Il faut donc que  $n^2 - 4n + 3 \leq |2n + 10|$ ,  $n \neq 1$ ,  $n \neq 3$ .

On considère trois cas :

*1<sup>er</sup> cas*

Si  $n < -5$ , il faut que  $n^2 - 4n + 3 \leq -(2n + 10)$ .

$$n^2 - 2n + 13 \leq 0$$

Cette inéquation n'admet aucune solution, puisque son discriminant est négatif.

*2<sup>e</sup> cas*

Si  $n = -5$ , l'expression rationnelle  $\frac{2n + 10}{n^2 - 4n + 3}$  sera égale à 0, ce qui est un entier.

*3<sup>e</sup> cas*

Si  $n > -5$ ,  $n \neq 1$ ,  $n \neq 3$ , il faut que  $n^2 - 4n + 3 \leq 2n + 10$ .

$$n^2 - 6n - 7 \leq 0$$

$$(n + 1)(n - 7) \leq 0$$

$$-1 \leq n \leq 7$$

Il suffit donc de vérifier les valeurs entières de  $n$  telles que  $-1 \leq n \leq 7$ ,  $n \neq 1$ ,  $n \neq 3$ . Le tableau contient aussi la valeur de l'expression rationnelle pour  $n = -5$ .

$n$	-5	-1	0	2	4	5	6	7
$\frac{2n + 10}{(n - 3)(n - 1)}$	0	+1	$\frac{10}{3}$	-14	6	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{15}$	1

Il y a donc cinq valeurs acceptables de  $n$ .

RÉPONSE : (E)