Concours
canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions

Concours Euclide

(12e année – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

1. a) Si $x^{-1} = 3^{-1} + 4^{-1}$, quelle est la valeur de x?

Solution

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{7}{12}$$
$$x = \frac{12}{7}$$

b) Si le point $P(-3, 2)$ est situé sur la droite d'équation $3x + 7ky = 5$, quelle est la valeur de x?

Solution

Puisque P est situé sur la droite, ses coordonnées vérifient l'équation.

Donc : $3(-3) + 7k(2) = 5$
$$14k = 14$$
$$k = 1$$

c) Déterminer toutes les valeurs possibles de $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$, sachant que $x^2 - x - 2 = 0$.

Solution 1

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2 \text{ ou } x = -1$$

On reporte $x = 2$ dans $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$ pour obtenir $1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$, ou -1.

On reporte $x = -1$ dans $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$ pour obtenir $1 + 1 - 6$, ou -4.

Les valeurs possibles sont -1 et -4.

Solution 2

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2}$$
$$= \frac{(x^2 - x - 2) - 4}{x^2}$$
$$= \frac{-4}{x^2} \quad (\text{puisque } x^2 - x - 2 = 0)$$

Or comme dans la solution 1, l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ a pour solutions $x = 2$ et $x = -1$.

On reporte $x = 2$ dans $\frac{-4}{x^2}$ pour obtenir $\frac{-4}{4}$, ou -1.

On reporte $x = -1$ dans $\frac{-4}{x^2}$ pour obtenir $\frac{-4}{1}$, ou -4.

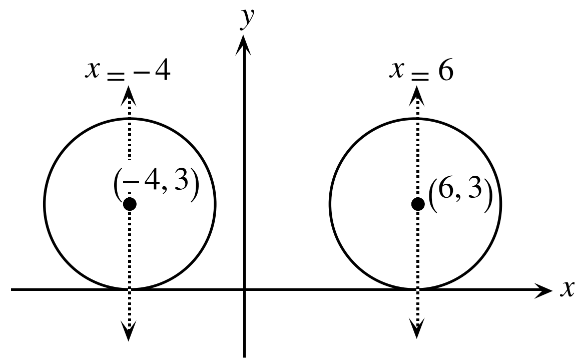
Les valeurs possibles sont –1 et –4.

2. a) On fait bouger le cercle d'équation $(x+4)^2+(y-3)^2=9$ horizontalement jusqu'à ce que son centre soit situé sur la droite d'équation $x=6$. Sur quelle distance le centre du cercle bouge-t-il?

Solution

Le cercle a pour centre le point $(-4, 3)$.

Comme l'indique le diagramme, le centre bouge sur une distance de 10 unités.



b) La parabole d'équation $y=(x-1)^2-4$ croise l'axe des x aux points P et Q. Soit (a, b) le milieu du segment PQ. Quelle est la valeur de a?

Solution 1

Aux points P et Q, on a $y=0$.

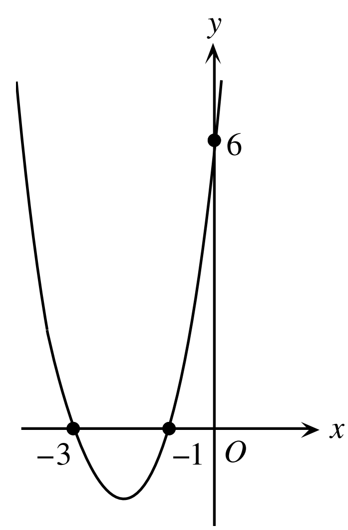
Donc $0=(x-1)^2-4$, d'où $x=3$ ou $x=-1$.

Le milieu du segment PQ a pour abscisse $a=\dfrac{3+(-1)}{2}$, ou $a=1$.

Solution 2

Puisque la parabole a pour sommet $(1, -4)$, alors par symétrie, $a=1$.

c) La courbe représente une fonction polynôme du second degré. Déterminer une équation qui représente cette fonction.



Solution 1

Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de la fonction.

Puisque les points $(-3, 0)$, $(-1, 0)$ et $(0, 6)$ sont sur la parabole, ils vérifient l'équation.

On reporte $(0, 6)$ dans l'équation pour obtenir $6 = 0 + 0 + c$, d'où $c = 6$.

On reporte $(-3, 0)$ et $(-1, 0)$ dans l'équation $y = ax^2 + bx + 6$ pour obtenir :

$$0 = 9a - 3b + 6$$

et $$0 = a - b + 6$$

On résout le système pour obtenir $a = 2$, $b = 8$.

L'équation est $y = 2x^2 + 8x + 6$.

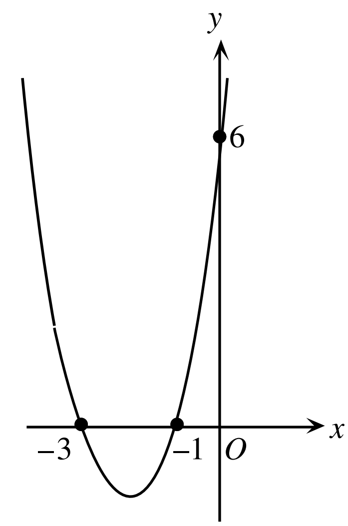
Solution 2

Puisque la courbe a pour abscisses à l'origine -3 et -1, son équation a la forme $y = k(x+3)(x+1)$.

Puisque le point $(0, 6)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation. Donc :

$$6 = k(0+3)(0+1)$$
$$k = 2$$

L'équation est $y = 2(x+3)(x+1)$.



Solution 3

Par symétrie, le sommet de la parabole a pour abscisse -2.

Son équation a donc la forme $y = a(x+2)^2 + c$.

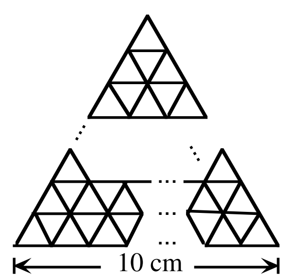
Puisque le point $(0, 6)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation : $6 = 4a + c$

Puisque le point $(-1, 0)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation : $0 = a + c$

On résout le système pour obtenir $a = 2$, $c = -2$.

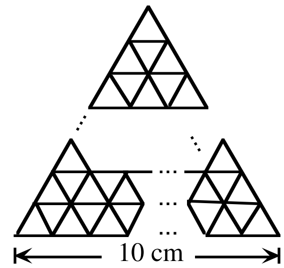
L'équation est $y = 2(x+2)^2 - 2$.

3. a) On place des triangles équilatéraux ayant des côtés de 1 cm comme dans le diagramme. Combien faut-il de ces triangles pour recouvrir l'intérieur d'un triangle équilatéral ayant des côtés de 10 cm?



Solution1

On procède rangée par rangée pour découvrir une régularité. Dans la première rangée du haut, il y a 1 triangle. Dans les deux premières rangées, il y a 2^2, ou 4 triangles. Dans les trois premières rangées, il y a 3^2, ou 9 triangles. Donc dans les 10 premières rangées, il y a 10^2, ou 100 triangles.



Solution 2

Puisque le grand triangle est semblable au petit, le rapport des aires de ces triangles est égal au rapport des carrés des longueurs des côtés, c'est-à-dire $10^2:1^2$ ou $100:1$. Le grand triangle contient donc 100 petits triangles.

b) Alphaville et Betaville avaient la même population à la fin de 1995. La population d'Alphaville a diminué de 2,9 % en 1996. Elle a augmenté de 8,9 % en 1997, puis elle a augmenté de 6,9 % en 1998. La population de Betaville a augmenté de $r\%$ à chacune de ces trois années. Si les deux villes ont encore des populations égales à la fin de 1998, déterminer la valeur de r au dixième près.

Solution

Soit P la population de chaque ville en 1995.
En 1996, la population d'Alphaville est égale à $P-(0,029)P$, ou $(0,971)P$.
En 1997, la population d'Alphaville est égale à $(0,971)P+(0,089)(0,971)P$, ou $(1,089)(0,971)P$.
En 1998, la population d'Alphaville est égale à $(1,089)(0,971)P+(0,069)(1,089)(0,971)P$, ou $(1,069)(1,089)(0,971)P$.

De même, en 1998, la population de Betaville est égale à $\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 P$.

Puisque les deux villes ont encore des populations égales à la fin de 1998 :

$$(1,069)(1,089)(0,971)P=\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 P$$

$$1,1303=\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

On peut procéder de deux façons :

1re façon

$$\sqrt[3]{1,1303}=1+\frac{r}{100}$$

$$1,0416=1+\frac{r}{100}$$

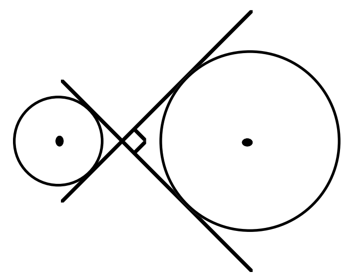
$$0,0416=\frac{r}{100}$$

$$r\approx 4,2$$

2^e^ façon

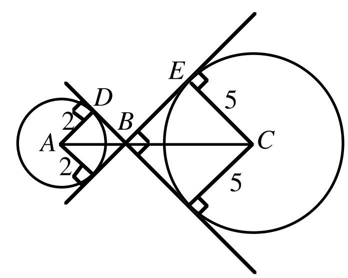
$$\log(1{,}1303) = \log\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$
$$\log(1{,}1303) = 3\log\left(1+\frac{r}{100}\right)$$
$$0{,}01773 = \log\left(1+\frac{r}{100}\right)$$
$$1+\frac{r}{100} = 1{,}0416$$
$$r \approx 4{,}2$$

4. a) Comme l'indique le diagramme, les tangentes aux cercles se croisent à un angle de $90°$. Si le petit cercle a un rayon de 2 et le grand cercle a un rayon de 5, quelle est la distance entre les centres des cercles?



Solution

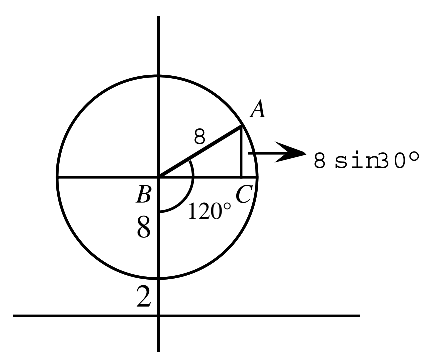
Les triangles *ABD* et *BCE* sont des triangles 90°-45°-45°. Ce sont donc des triangles isocèles rectangles. Les longueurs de leurs côtés sont donc dans le rapport $\sqrt{2}:1:1$. Donc $AB = 2\sqrt{2}$ et $BC = 5\sqrt{2}$.
La distance entre les centres est égale à $7\sqrt{2}$.



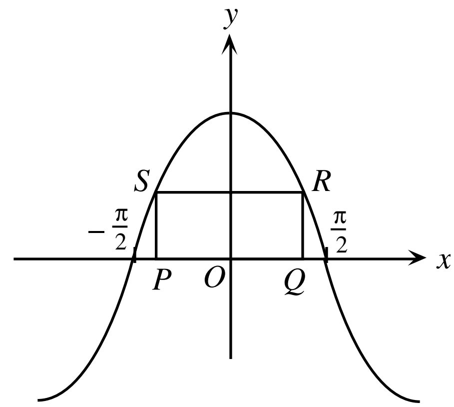
b) Une grande roue, dans une foire, a un rayon de 8 m et elle tourne à une vitesse de $12°$ par seconde. Au temps $t = 0$, un siège est situé au point le plus bas, à 2 m au-dessus du niveau du sol. Déterminer la hauteur du siège, par rapport au sol, au temps $t = 40$ secondes.

Solution

Au temps $t = 40$, la roue a tourné $40 \times 12°$, ou $480°$. Le siège est donc à $480° - 360°$, ou $120°$ de sa position de départ.
Soit *A* la position du siège au temps $t = 40$.
Le triangle ABC est rectangle et $AC = 8\sin 30°$, ou $AC = 4$.
La hauteur du siège, par rapport au sol, au temps $t = 40$ secondes, est égale à $4 + 8 + 2$, ou 14 m.

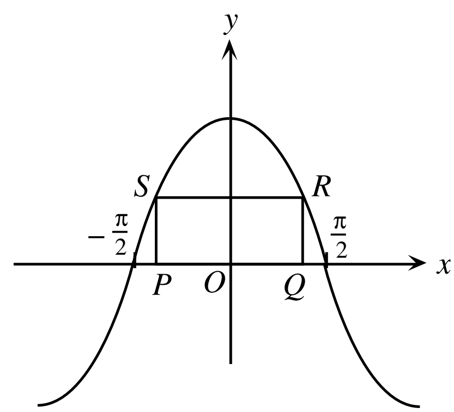


5. a) Le côté PQ du rectangle $PQRS$ est situé sur l'axe des x. Le rectangle touche la courbe définie par $y = k\cos x$ aux points S et R. Si le côté PQ a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et si le rectangle a une aire de $\frac{5\pi}{3}$, quelle est la valeur de k?



Solution

Puisque $PQ = \frac{\pi}{3}$, alors par symétrie, les coordonnées de R sont $\left(\frac{\pi}{6},\ k\cos\frac{\pi}{6}\right)$, ou $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}k}{2}\right)$.

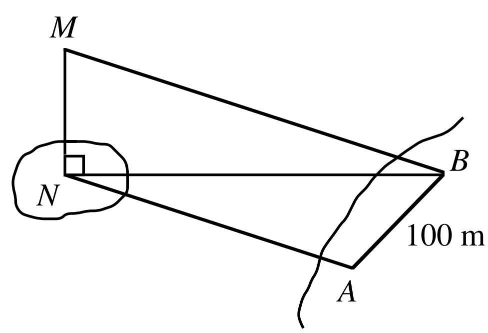


L'aire du rectangle $PQRS$ est égale à $\frac{5\pi}{3}$. Donc :

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}k}{2} = \frac{5\pi}{3}$$

$$k = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

b) Afin de déterminer la hauteur MN d'une tour sur une île, on a choisi les points A et B dans le même plan horizontal que le point N, de manière qu'il y ait une distance de 100 m entre A et B. On a ensuite obtenu les mesures suivantes : $\angle NAB = 108°$, $\angle ABN = 47°$ et $\angle MBN = 32°$. Déterminer la hauteur de la tour au mètre près.



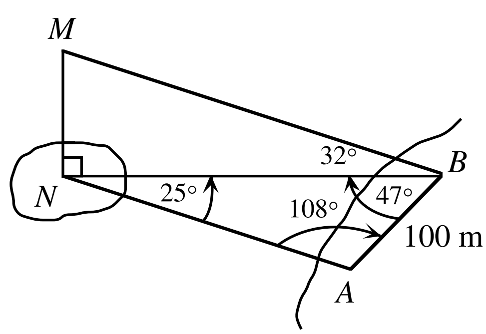
Solution

Dans le triangle BAN, $\angle BNA = 25°$.

D'après la loi des sinus :

$$\frac{NB}{\sin 108°} = \frac{100}{\sin 25°}$$

$$NB = \frac{100 \sin 108°}{\sin 25°}$$

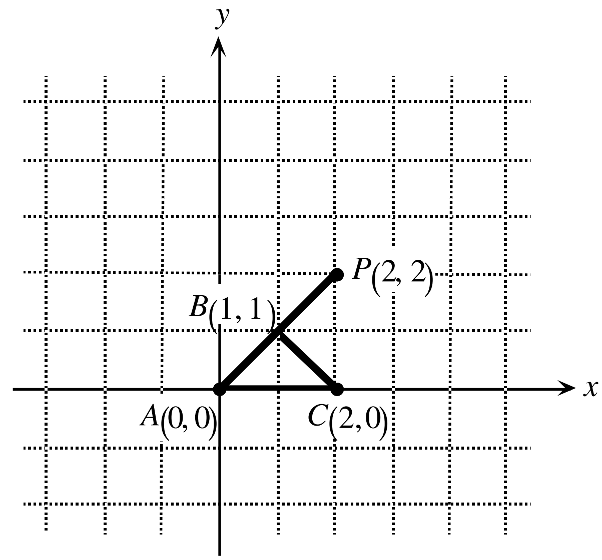


Dans le triangle MNB, $\frac{MN}{NB} = \tan 32°$.

$$MN = \frac{100 \sin 108°}{\sin 25°} \times \tan 32°$$
$$\approx 140{,}6$$

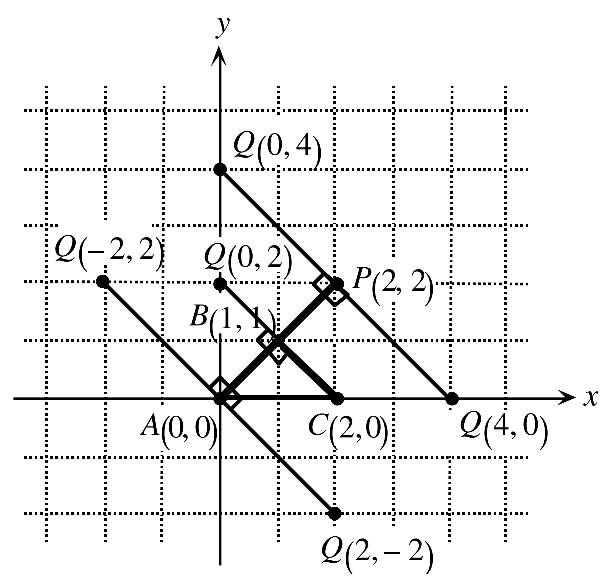
La tour a une hauteur de 141 m.

6. a) On veut choisir un point Q, dans le plan, de manière que les points A, P et Q forment un triangle semblable au triangle ABC. Quelles sont les coordonnées de toutes les positions possibles du point Q?



Solution

$Q(4, 0), Q(0, 4)$
$Q(2, 0), Q(0, 2)$
$Q(-2, 2), Q(2, -2)$



b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes définies par $y = \log_{10}(x-2)$ et $y = 1 - \log_{10}(x+1)$.

Solution

Pour un point d'intersection, on a :

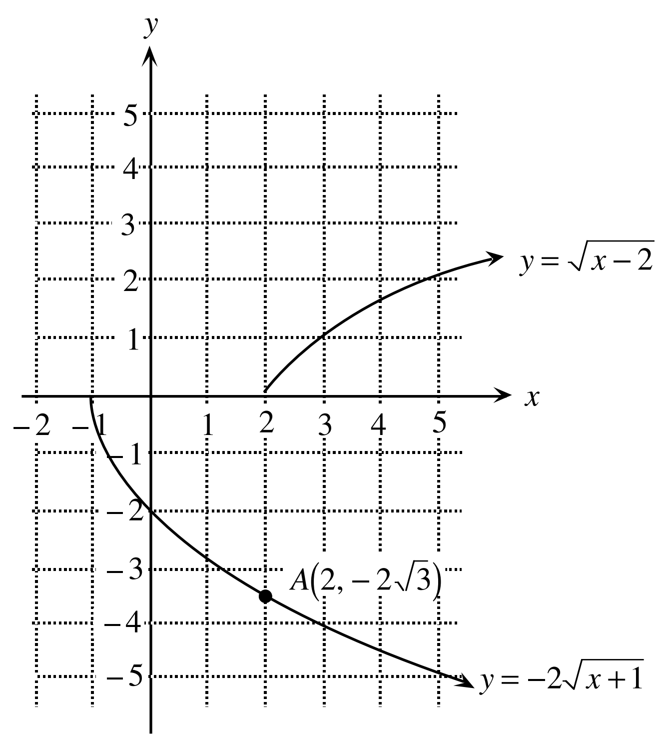
$$\log_{10}(x-2) = 1 - \log_{10}(x+1)$$
$$\log_{10}(x-2) + \log_{10}(x+1) = 1$$
$$\log_{10}\left(x^2 - x - 2\right) = 1$$
$$x^2 - x - 2 = 10$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = -3$$

Les courbes ne sont pas définies en $x = -3$.
Si $x = 4$, on a $y = \log_{10} 2$.
Les courbes admettent un point d'intersection en $\left(4, \log_{10} 2\right)$.

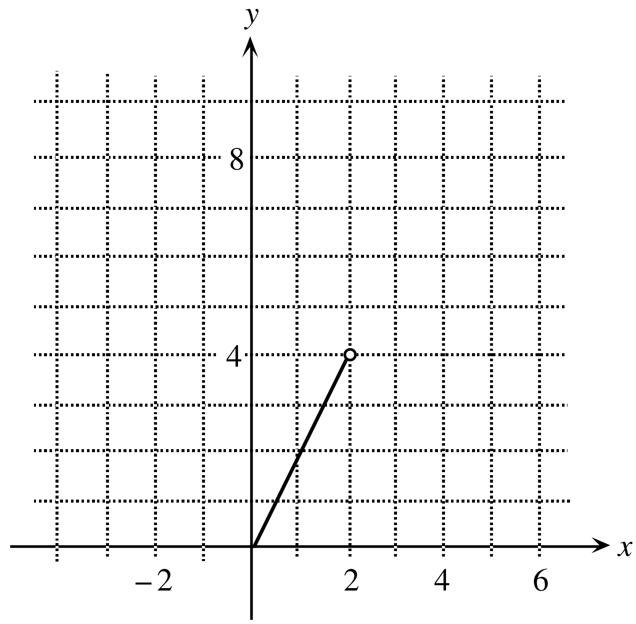
7. a) Dans le plan fourni à cet effet dans le cahier-réponse, tracer les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2} + k$ se croiseront-elles? (On suppose que x et k sont des nombres réels.)

Solution

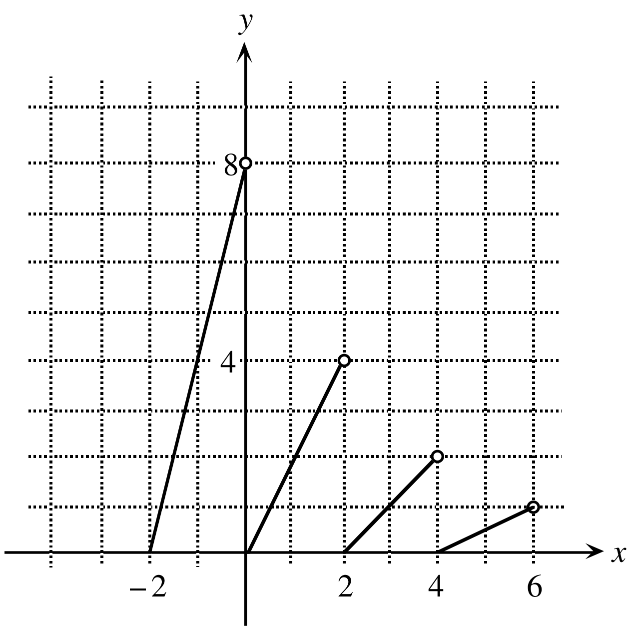
La courbe représentative de $y = \sqrt{x-2} + k$ est l'image de celle de $y = \sqrt{x-2}$ par une translation verticale. D'après le diagramme, les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2} + k$ se croisent si $k \le -2\sqrt{3}$.



b) Une partie de la représentation graphique de $y = f(x)$ est indiquée, pour $0 \le x < 2$.
Sachant que $f(x+2) = \frac{1}{2} f(x)$ pour toute valeur réelle de x, tracer la représentation graphique de $y = f(x)$ dans les intervalles $-2 \le x < 0$ et $2 \le x < 6$.



Solution



Remarque
Beaucoup de candidats ne savaient pas comment utiliser la notation $f(x+2) = \frac{1}{2} f(x)$. Voici une façon de le faire.

D'après le graphique, $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$.
On reporte $x = 0$ dans la formule pour obtenir $f(0+2) = \frac{1}{2} f(0)$, d'où $f(2) = 0$. Le point $(2, 0)$ est donc sur le graphique.
On reporte $x = 1$ dans la formule pour obtenir $f(1+2) = \frac{1}{2} f(1)$, d'où $f(3) = 1$. Le point $(3, 1)$

est donc sur le graphique.
On peut aussi prendre d'autres valeurs de x dans l'intervalle $2 \le x < 4$ pour déterminer les valeurs de $f(x)$.
On procède de la même façon dans les autres intervalles.

8. a) Pour toute valeur réelle de a, l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ représente une parabole. Démontrer que toutes ces paraboles ont un point commun et déterminer les coordonnées de ce point.

Solution 1
Soit $a = 0$ et $a = 1$ deux valeurs de a.
Lorsque $a = 0$, on a la parabole d'équation $y = x^2$.
Lorsque $a = 1$, on a la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 1$.
Pour un point d'intersection, posons $x^2 = x^2 + 2x + 1$. Donc $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$.
Ces deux paraboles admettent un point d'intersection $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Ce point est sur chaque parabole s'il vérifie l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ pour chaque valeur de a.
Si $x = -\frac{1}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2a\left(-\frac{1}{2}\right) + a \\ &= \frac{1}{4} - a + a \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Les paraboles admettent donc un point commun $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Remarque
On peut aussi choisir d'autres valeurs de a pour obtenir le même résultat.

Solution 2
Soit $y = x^2 + 2ax + a$ et $y = x^2 + 2bx + b$ les équations de deux paraboles distinctes de cette famille. Donc $a \ne b$.
Pour un point d'intersection, posons $x^2 + 2ax + a = x^2 + 2bx + b$.

$$\begin{aligned} 2ax - 2bx + a - b &= 0 \\ a(2x+1) - b(2x+1) &= 0 \\ (a-b)(2x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $a \ne b$, alors $2x + 1 = 0$, d'où $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$.
Les paraboles admettent donc un point commun $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Solution 3
On peut écrire l'équation générale de la parabole sous la forme $y = x^2 + a(2x+1)$.
Pour toute valeur de a, si $2x + 1 = 0$, alors $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$.

Le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est donc sur la parabole, quelle que soit la valeur de *a*.

Solution 4
Soit (p, q) un point commun pour toute valeur de *a*.
Donc $p = q^2 + 2ap + a$.
Si $a = 0$, alors $q = p^2$.
Si $a = 1$, alors $q = p^2 + 2p + 1$.
Comme dans la solution 1, on obtient $2p + 1 = 0$, d'où $p = -\frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{4}$.
Comme dans la solution 1, on vérifie que $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est sur la parabole quelle que soit la valeur de *a*.

b) Les sommets des paraboles de la partie a) sont situés sur une courbe. Démontrer que cette courbe est une parabole dont le sommet est le point commun de la partie a).

Solution
L'équation $y = x^2 + 2ax + a$ peut s'écrire sous la forme :

$$y = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + a$$
$$y = (x + a)^2 - a^2 + a$$

Pour toute valeur de *a*, le sommet de la parabole est le point $\left(-a, -a^2 + a\right)$.
Posons $x = -a$. Alors $-a^2 + a$ devient $-x^2 - x$.
Pour toute valeur de *a*, le sommet $\left(-a, -a^2 + a\right)$ de la parabole vérifie donc l'équation $y = -x^2 - x$. Il s'agit de l'équation d'une parabole.
En complétant le carré, on obtient l'équation canonique de la parabole, $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.
Son sommet est le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

9. Une « série du millénaire » est une série d'entiers consécutifs ayant une somme de 2000. Soit *m* le premier terme d'une série du millénaire.
   a) Déterminer la valeur minimale de *m*.
   b) Déterminer la plus petite valeur strictement positive de *m*.

Solution 1 - Parties a) et b)
Soit *m* le premier terme de la série et *k* le nombre de termes.
La série est donc $m + (m+1) + (m+2) + ... + (m + (k-1))$ et on a

$$m + (m+1) + (m+2) + ... + (m + k - 1) = 2000.$$

Cette série admet *k* termes.
La somme du premier terme et du dernier terme est égale à $(2m + k - 1)$.
Donc $\frac{k(2m + k - 1)}{2} = 2000$.

$$k(2m+k-1)=4000$$

Si k est pair, alors le nombre $(2m+k-1)$ doit être impair, puisque $2m$ est pair.
De même, si k est impair, le nombre $(2m+k-1)$ doit être pair.
Aussi, puisque k est positif, le nombre $(2m+k-1)$ est positif.
Les factorisations possibles de 4000, en deux facteurs positifs dont un des deux est impair, sont 1×4000, 5×800, 25×160 et 125×32. Le tableau suivant donne les valeurs possibles de k, de $(2m+k-1)$ et de m.

k	$2m+k-1$	m
1	4000	2000
5	800	398
25	160	68
125	32	–46
4000	1	–1999
800	5	–397
160	25	–67
32	125	47

a) La valeur minimale de m est -1999.
b) La plus petite valeur strictement positive de m est 47.

Remarque
Si la série avait été $m+(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+k)$, on aurait obtenu l'équation $(k+1)(2m+k)=4000$ et on aurait complété le tableau pour $(k+1)$, $(2m+k)$ et m.

Solution 2 - Parties a) et b)
Soit m le premier terme de la série et n le nombre de termes.
La série est donc $m+(m+1)+(m+2)+\ldots+(m+(n-1))=4000$.
Comme dans la solution précédente, on obtient $n(2m+n-1)=4000$.
Donc $n^2+(2m-1)n-4000=0$.
Puisque n est un entier positif, l'expression du membre de gauche peut être factorisée et l'équation admet deux racines entières.
Puisque la somme des racines est égale à $-(2m-1)$, qui est un entier impair, une racine doit être paire et l'autre, impaire.
Puisque le produit des racines est égal à –4000, une des racines est un diviseur impair de 4000, soit ± 1, ± 5, ± 25 ou ± 125. Le tableau suivant donne les factorisations possibles du membre de gauche, ainsi que les valeurs correspondantes de $(2m-1)$ et de m.

Factorisations	$(2m-1)$	m
$(n-1)(n+4000)$	3999	2000
$(n-5)(n+800)$	795	398
$(n-25)(n+160)$	135	68
$(n-125)(n+32)$	-93	-46
$(n+1)(n-4000)$	-3999	-1999
$(n+5)(n-800)$	-795	-397
$(n+25)(n-160)$	-135	-67
$(n+125)(n-32)$	93	47

a) La valeur minimale de m est -1999.

b) La plus petite valeur strictement positive de m est 47.

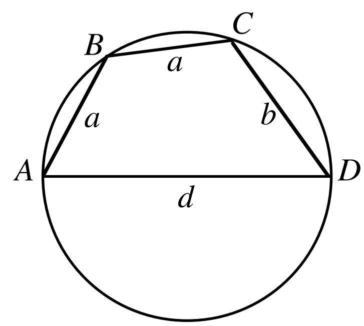
Solution 3 - Partie a)

Si le premier terme m de la suite est négatif et que l'on additionne des nombres consécutifs, la somme sera négative jusqu'à ce que l'on additionne tous les entiers de m à $|m|$. La somme sera alors 0. Pour obtenir une somme positive, il suffit alors d'ajouter le terme suivant, $|m|+1$. Ainsi si on additionne les nombres -1999, ..., 1999, 2000 , on obtient une somme de 2000. De plus, si le premier entier m est inférieur à -1999 et que l'on additionne jusqu'à ce qu'on obtienne le terme $|m|+1$, la somme sera supérieure à 2000. La valeur minimale de m est donc -1999.

10. Le diagramme illustre un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle, de manière que son côté AD soit un diamètre du cercle. Soit $AB=a$, $BC=a$, $CD=b$ et $AD=d$. Si a, b et d sont des entiers et si $a \neq b$:

a) démontrer que d ne peut être un nombre premier;

b) déterminer la valeur *minimale* de d.



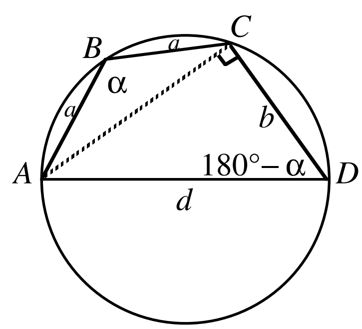
Solution

a) On joint A et C. Puisque l'angle ACD est inscrit dans un demi-cercle, $\angle ACD = 90°$.

Soit $\angle ABC = \alpha$. Puisque le quadrilatère est inscrit, $\angle CDA = 180° - \alpha$.

Dans le triangle ABC, on a
$AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \alpha$ (1).

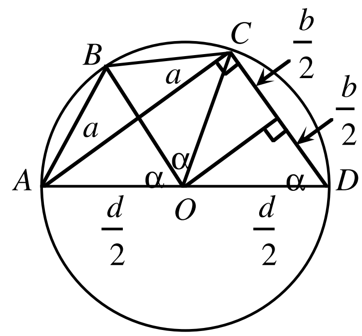
Dans le triangle ACD, on a $AC^2 = d^2 - b^2$ et
$\cos(180° - \alpha) = \frac{b}{d}$, d'où $\cos \alpha = -\frac{b}{d}$.



On reporte dans (1) pour obtenir :

$$
\begin{aligned}
d^2 - b^2 &= 2a^2 - 2a^2\left(-\frac{b}{d}\right) \\
d^3 - db^2 &= 2a^2 d + 2a^2 b \\
d\left(d^2 - b^2\right) &= 2a^2(d+b) \\
d(d+b)(d-b) &= 2a^2(d+b) \\
2a^2 &= d(d-b), \text{ puisque } d \neq b
\end{aligned}
$$

On peut aussi obtenir ce résultat de la manière suivante.
Dans le triangle OBC, on a :



$$a^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} - 2\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right)\cos\alpha$$

$$a^2 = \frac{d^2}{2}(1 - \cos\alpha)$$

Or $\cos\alpha = \dfrac{\frac{b}{2}}{\frac{d}{2}} = \dfrac{b}{d}$.

Donc $2a^2 = d(d-b)$.

On suppose que d est un nombre premier, pour en arriver à une contradiction.
Donc $d = 2$ ou $d \geq 3$.

1er cas : $d = 2$
Puisque a et b sont des entiers et que d, étant un diamètre, est supérieur à a et à b, alors $a = b = 1$, ce qui contredit la donnée, $a \neq b$.
Donc $d \neq 2$.

2e cas : $d \geq 3$ et d est premier
On examine la relation $2a^2 = d(d-b)$, sachant que a, b et d sont des entiers. Puisque d est un facteur du membre de droite, il doit être un diviseur du membre de gauche. Puisque $d \geq 3$, d ne peut être un diviseur de 2. Donc d doit être un diviseur de a^2. De plus, puisque d est un nombre premier et qu'il est diviseur de a^2, il doit être diviseur de a. Ceci est une contradiction, car d, étant un diamètre, est supérieur à a.

La supposition que d est un nombre premier est donc fausse et d est donc un nombre composé.

Remarque
Rien, dans la démonstration précédente, ne prouve l'existence d'un tel nombre composé d. Ce sera fait dans la partie b).

Solution

b) Puisque d n'est pas premier, alors $d \neq 2$, 3, 5, 7, etc.
Posons $d = 4$.
La relation $2a^2 = d(d - b)$ devient $2a^2 = 4(4 - b)$.
$$a^2 = 2(4 - b)$$
Puisque d est supérieur à b, alors b est égal à 1, 2 ou 3.
Si $b = 1$, alors $a^2 = 6$, ce qui contredit que a est un entier.
Si $b = 2$, alors $a = 2$, ce qui contredit la donnée $a \neq b$.
Si $b = 3$, alors $a^2 = 2$, ce qui contredit que a est un entier.
Donc $d \neq 4$.

Posons $d = 6$.
La relation $2a^2 = d(d - b)$ devient $2a^2 = 6(6 - b)$.
$$a^2 = 3(6 - b)$$
Puisque d est supérieur à b, alors b est égal à 1, 2, 3, 4 ou 5.
Comme ci-haut, si b est égal à 1, 2, 4 ou 5, alors a^2 est égal à 15, 12, 6 ou 3, ce qui contredit que a est un entier. Si $b = 3$, alors $a = 3$, ce qui contredit la donnée $a \neq b$.
Donc $d \neq 6$.

Posons $d = 8$.
La relation $2a^2 = d(d - b)$ devient $2a^2 = 8(8 - b)$.
$$a^2 = 4(8 - b)$$
Alors $a = 2$ et $b = 7$ est une solution.
La valeur minimale de d est 8.