Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12e – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Le mardi 20 avril 1999

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Banque Nationale du Canada

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Une partie des points sera accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. À moins d'avis contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de nombres exacts tels que 4π et $2+\sqrt{7}$.

1. a) Si $x^{-1} = 3^{-1} + 4^{-1}$, quelle est la valeur de x?

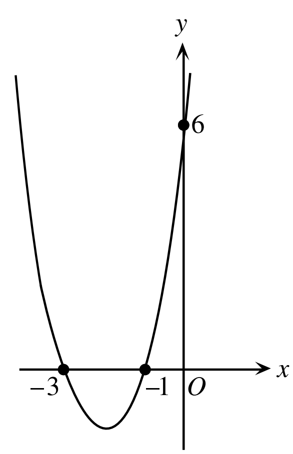
b) Si le point $P(-3, 2)$ est situé sur la droite d'équation $3x + 7ky = 5$, quelle est la valeur de k?

c) Déterminer toutes les valeurs possibles de $1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}$, sachant que $x^2 - x - 2 = 0$.

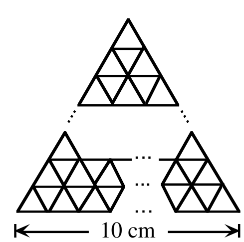
2. a) On fait bouger le cercle d'équation $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$ horizontalement jusqu'à ce que son centre soit situé sur la droite d'équation $x = 6$. Sur quelle distance le centre du cercle bouge-t-il?

b) La parabole d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ croise l'axe des x aux points P et Q. Soit (a, b) le milieu du segment PQ. Quelle est la valeur de a?

c) La courbe représente une fonction polynôme du second degré. Déterminer une équation qui représente cette fonction.

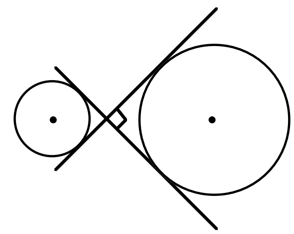


3. a) On place des triangles équilatéraux ayant des côtés de 1 cm comme dans le diagramme. Combien faut-il de ces triangles pour recouvrir l'intérieur d'un triangle équilatéral ayant des côtés de 10 cm?



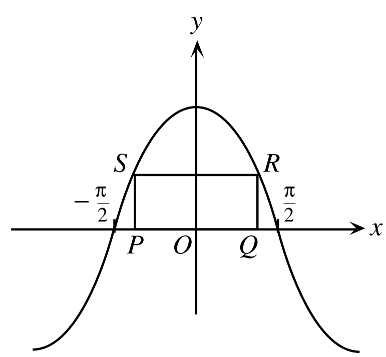
b) Alphaville et Betaville avaient la même population à la fin de 1995. La population d'Alphaville a diminué de 2,9 % en 1996. Elle a augmenté de 8,9 % en 1997, puis elle a augmenté de 6,9 % en 1998. La population de Betaville a augmenté de $r\%$ à chacune de ces trois années. Si les deux villes ont encore des populations égales à la fin de 1998, déterminer la valeur de r au dixième près.

4. a) Comme l'indique le diagramme, les tangentes aux cercles se croisent à un angle de $90°$. Si le petit cercle a un rayon de 2 et le grand cercle a un rayon de 5, quelle est la distance entre les centres des cercles?

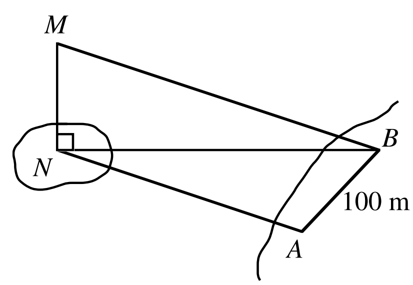


b) Une grande roue, dans une foire, a un rayon de 8 m et elle tourne à une vitesse de 12° par seconde. Au temps $t = 0$, un siège est situé au point le plus bas, à 2 m au-dessus du niveau du sol. Déterminer la hauteur du siège, par rapport au sol, au temps $t = 40$ secondes.

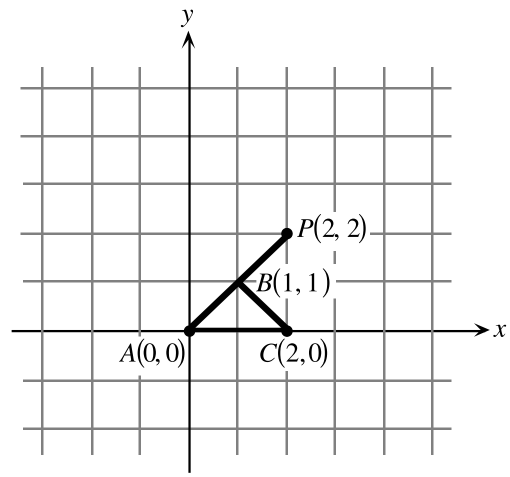
5. a) Le côté PQ du rectangle $PQRS$ est situé sur l'axe des x. Le rectangle touche la courbe définie par $y = k \cos x$ aux points S et R. Si le côté PQ a une longueur de $\frac{\pi}{3}$ et si le rectangle a une aire de $\frac{5\pi}{3}$, quelle est la valeur de k?



b) Afin de déterminer la hauteur MN d'une tour sur une île, on a choisi les points A et B dans le même plan horizontal que le point N, de manière qu'il y ait une distance de 100 m entre A et B. On a ensuite obtenu les mesures suivantes : $\angle NAB = 108°$, $\angle ABN = 47°$ et $\angle MBN = 32°$. Déterminer la hauteur de la tour au mètre près.



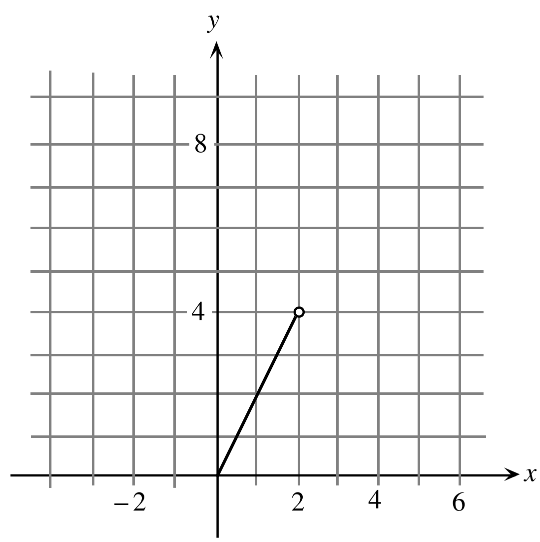
6\. a) On veut choisir un point Q, dans le plan, de manière que les points A, P et Q forment un triangle semblable au triangle ABC. Quelles sont les coordonnées de toutes les positions possibles du point Q?



b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes définies par $y = \log_{10}(x-2)$ et $y = 1 - \log_{10}(x+1)$.

7\. a) Dans le plan fourni à cet effet dans le cahier-réponse, tracer les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k les courbes définies par $y = -2\sqrt{x+1}$ et $y = \sqrt{x-2} + k$ se croiseront-elles? (On suppose que x et k sont des nombres réels.)

b) Une partie de la représentation graphique de $y = f(x)$ est indiquée, pour $0 \le x < 2$. Sachant que $f(x+2) = \frac{1}{2} f(x)$ pour toute valeur réelle de x, tracer la représentation graphique de $y = f(x)$ dans les intervalles $-2 \le x < 0$ et $2 \le x < 6$.



8\. a) Pour toute valeur réelle de a, l'équation $y = x^2 + 2ax + a$ représente une parabole. Démontrer que toutes ces paraboles ont un point commun et déterminer les coordonnées de ce point.

b) Les sommets des paraboles de la partie a) sont situés sur une courbe. Démontrer que cette courbe est une parabole dont le sommet est le point commun de la partie a).

à suivre ...

9. Une « série du millénaire » est une série d'entiers consécutifs ayant une somme de 2000. Soit m le premier terme d'une série du millénaire.

a) Déterminer la valeur minimale de m.

b) Déterminer la plus petite valeur strictement positive de m.

10. Le diagramme illustre un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle, de manière que son côté AD soit un diamètre du cercle. Soit $AB = a$, $BC = a$, $CD = b$ et $AD = d$. Si a, b et d sont des entiers et si $a \neq b$:

a) démontrer que d ne peut être un nombre premier;

b) déterminer la valeur *minimale* de d.