Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1999 Solutions
Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix
BANQUE NATIONALE DU CANADA

Partie A

1. La valeur de $3^2+7^2-5^2$ est :

(**A**) 75 (**B**) 83 (**C**) 33 (**D**) 25 (**E**) 10

Solution
$3^2+7^2-5^2 = 9+49-25$
$= 33$ RÉPONSE : (C)

2. Si on ajoute 8 au carré de 5, le résultat est divisible par :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 23 (**E**) 11

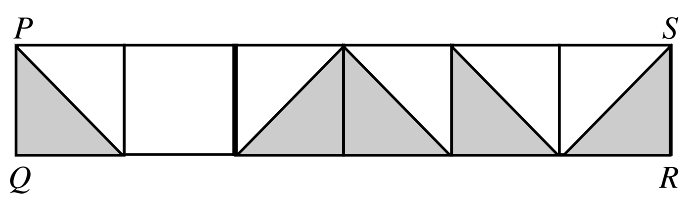
Solution
$8+5^2=33$
Parmi les cinq choix, le seul diviseur de 33 est 11. RÉPONSE : (E)

3. Nous sommes aujourd'hui mercredi. Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 jours?

(**A**) lundi (**B**) mardi (**C**) jeudi (**D**) vendredi (**E**) samedi

Solution
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $98=7\times 14$, nous serons un mercredi dans 98 jours. Dans 100 jours, nous serons donc un vendredi. RÉPONSE : (D)

4. Le rectangle $PQRS$ est formé de six carrés égaux. Quelle fraction du rectangle $PQRS$ est ombrée?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{7}{12}$ (**C**) $\frac{5}{11}$ (**D**) $\frac{6}{11}$ (**E**) $\frac{5}{12}$

Solution
Il y a 5 demi-carrés ombrés sur un total possible de 12 demi-carrés.
Donc $\frac{5}{12}$ du rectangle $PQRS$ est ombrée. RÉPONSE : (E)

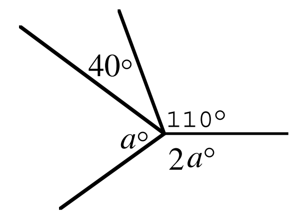
5. Si $x=4$, $y=3x$ et $z=2y$, alors $y+z$ est égal à :

(**A**) 12 (**B**) 20 (**C**) 40 (**D**) 24 (**E**) 36

Solution
Si $x = 4$, alors $y = 12$ et $z = 24$.
Donc $y + z = 36$. RÉPONSE : (E)

6. Selon le diagramme, la valeur de a est :

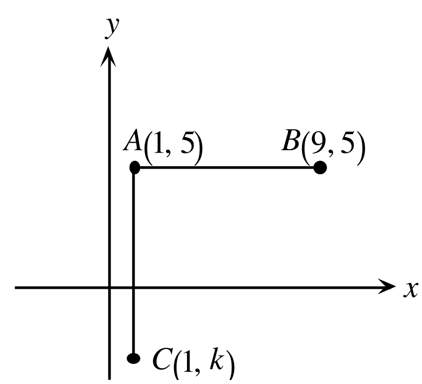
(**A**) 50 (**B**) 65 (**C**) 70
(**D**) 105 (**E**) 110



Solution
Puisque $3a° + 150° = 360°$, alors
$$3a° = 210°.$$
Donc $a = 70$. RÉPONSE : (C)

7. Dans le diagramme, les longueurs des segments AB et AC sont égales. Quelle est la valeur de k?

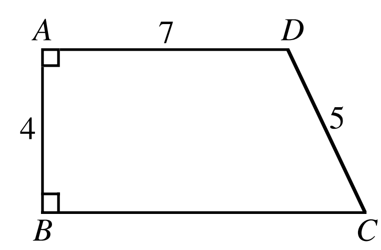
(**A**) -3 (**B**) -4 (**C**) -5
(**D**) -7 (**E**) -8



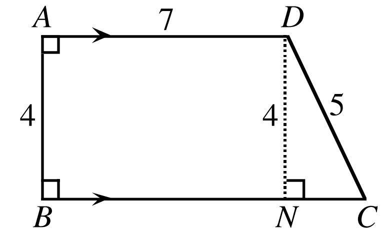
Solution
Puisque $AB = AC = 8$, alors $5 - k = 8$.
Donc $k = -3$. RÉPONSE : (A)

8. Dans le diagramme, on a $AD < BC$. Quel est le périmètre de $ABCD$?

(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 27
(**D**) 28 (**E**) 30



Solution
Au point D, on abaisse une perpendiculaire DN à BC. Puisque $ADNB$ est un rectangle, alors $DN = 4$ et $BN = 7$. Puisque le triangle CDN est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $NC = 3$. On a donc $BC = 7 + 3$, ou 10.
Le périmètre est égal à $7 + 5 + 10 + 4$, ou 26.



RÉPONSE : (B)

9. On achète trois disques compacts à un coût moyen de 15 \$. Si on achète un quatrième disque, le coût moyen devient 16 \$. Quel est le coût du quatrième disque?

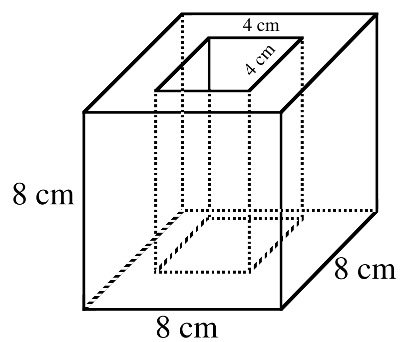
(**A**) \$16 (**B**) \$17 (**C**) \$18 (**D**) \$19 (**E**) \$20

Solution
Puisque le coût moyen des quatre disques est 16 \$, leur coût total est 64 \$. De même, le coût total des trois premiers disques est 45 \$. Le quatrième disque coûte donc 64 \$ – 45 \$, ou 19 \$.

RÉPONSE : (D)

10. Le diagramme illustre un cube de 8 cm dans lequel on a creusé un trou ayant la forme d'un carré de 4 cm. Quel est le volume, en cm^3, du bloc troué?

(**A**) 64 (**B**) 128 (**C**) 256
(**D**) 384 (**E**) 448



Solution
Le volume du bloc troué, en cm^3, est égal à :
$8 \times 8 \times 8 - 8 \times 4 \times 4 = 384$

RÉPONSE : (D)

Partie B

11. Une montre à affichage digital indique $5{:}55$. Combien de minutes s'écouleront avant que la montre indique de nouveau des chiffres qui sont tous identiques?

(**A**) 71 (**B**) 72 (**C**) 255 (**D**) 316 (**E**) 436

Solution
Les prochains chiffres identiques seront $11{:}11$. Cela représente une différence de 316 minutes. (On remarque que les affichages $6{:}66$, $7{:}77$, etc., sont impossibles.)

RÉPONSE : (D)

12. On place les nombres 49, 29, 9, 40, 22, 15, 53, 33, 13 et 47 en paires de manière que la somme des nombres de chaque paire soit la même. Quel nombre forme une paire avec 15?

(**A**) 33 (**B**) 40 (**C**) 47 (**D**) 49 (**E**) 53

Solution 1
Si on place les nombres en ordre ascendant, on obtient 9, 13, 15, 22, 29, 33, 40, 47, 49, 53.
Pour obtenir des sommes égales, on forme les paires suivantes : $9 \leftrightarrow 53$, $13 \leftrightarrow 49$, $15 \leftrightarrow 47$, $22 \leftrightarrow 40$, $29 \leftrightarrow 33$.

Solution 2
La somme des 10 nombres est égale à 310. Chacune des cinq paires doit donc avoir une somme de $\frac{310}{5}$, ou 62. Le nombre 47 forme donc une paire avec 15. RÉPONSE : (C)

13. Le chiffre des unités du produit $(5^2+1)(5^3+1)(5^{23}+1)$ est :

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
Si on développe les nombres 5^2, 5^3 et 5^{23}, leur chiffre des unités est égal à 5. Si on développe les nombres 5^2+1, 5^3+1 et $5^{23}+1$, le chiffre des unités de chaque nombre est donc un 6. Si on multiplie deux nombres ayant chacun 6 pour chiffre des unités, le produit aura aussi 6 pour chiffre des unités. Le chiffre des unités du produit $(5^2+1)(5^3+1)(5^{23}+1)$ est donc 6.

RÉPONSE : (E)

14. Quatre candidates et candidats se présentent à la présidence d'un comité. Chacun des 61 membres doit voter pour une seule candidate ou un seul candidat. Celle ou celui qui reçoit le plus grand nombre de votes est élu. Le plus petit nombre de votes que l'élu ou l'élue peut recevoir est :

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 21 (**D**) 30 (**E**) 31

Solution
Après que 60 membres ont voté, il se pourrait que chaque candidate ou candidat ait reçu 15 votes. Le dernier membre à voter, le 61ᵉ, permettrait alors à une personne d'être élue en recevant 16 votes seulement. RÉPONSE : (B)

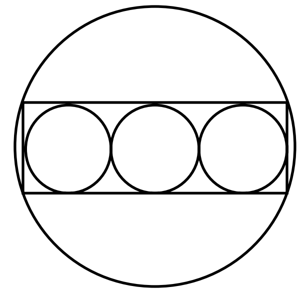
15. Une boisson au chocolat contient 6 % de chocolat pur en volume. Si on ajoute 10 litres de lait pur à 50 litres de cette boisson, le pourcentage de chocolat pur dans la nouvelle boisson sera égal à :

(**A**) 5 (**B**) 16 (**C**) 10 (**D**) 3 (**E**) 26

Solution
Puisqu'il y a 6 % de chocolat pur dans 50 litres de boisson, celle-ci contient trois litres de chocolat

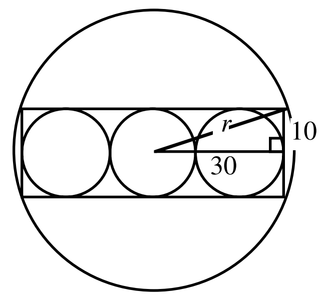
pur. La nouvelle boisson contient 60 litres dont trois litres de chocolat pur. Cela représente $\frac{3}{60}$ ou 5 % de chocolat pur.
RÉPONSE : (A)

16. On trace trois cercles, ayant chacun un rayon de 10 cm, de manière qu'ils soient tangents l'un à l'autre et que leurs centres soient placés en ligne droite. Ces cercles sont inscrits dans un rectangle qui est lui-même inscrit dans un autre cercle. L'aire de ce grand cercle est égale à :



(**A**) 1000π (**B**) 1700π (**C**) 900π
(**D**) 1600π (**E**) 1300π

Solution
Par symétrie, le centre du grand cercle est le centre du petit cercle au milieu. D'après le diagramme, on a $r^2 = 30^2 + 10^2$, ou $r^2 = 1000$. L'aire du grand cercle est égale à :



$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi(1000) \\ &= 1000\pi \end{aligned}$$

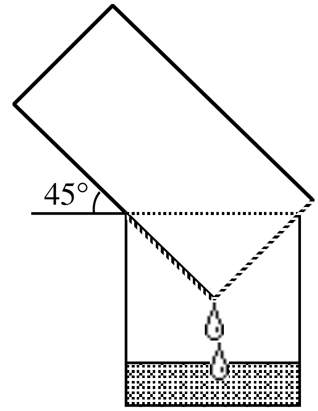
RÉPONSE : (A)

17. Soit N le plus petit entier positif dont le produit des chiffres est égal à 2000. La somme des chiffres de N est égale à :

(**A**) 21 (**B**) 23 (**C**) 25 (**D**) 27 (**E**) 29

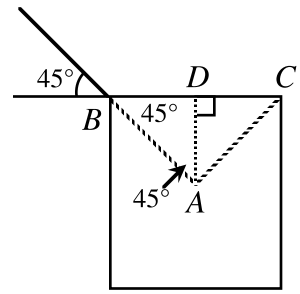
Solution
Puisque $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, le plus petit entier positif dont le produit des chiffres est égal à 2000 est $25\,558$. La somme de ses chiffres est égale à $2+5+5+5+8$, ou 25. On pourrait croire que la réponse est 23, car le produit des chiffres de l'entier $44\,555$ est égal à 2000 et la somme de ses chiffres est égale à 23. Or $25\,558 < 44\,555$ et on demandait le plus petit entier. La réponse est donc 25 et non pas 23.
RÉPONSE : (C)

18. On laisse l'eau d'un seau s'écouler dans un bassin cylindrique ayant un diamètre de 40 cm et une profondeur de 50 cm. Le seau est placé à un angle de $45°$ par rapport à l'horizontale, comme l'illustre le diagramme. Quelle est la profondeur de l'eau dans le bassin lorsque le niveau de l'eau atteint le seau?



(**A**) 10 cm (**B**) 20 cm (**C**) 30 cm
(**D**) 35 cm (**E**) 40 cm

Solution
Soit les points A, B et C indiqués dans le diagramme. Le triangle ABC est rectangle en A. Puisque l'angle ABC mesure 45°, le triangle est aussi isocèle.
La hauteur AD forme un deuxième triangle rectangle isocèle ABD. Puisque $BD = 20$ cm et $BD = DA$, alors $DA = 20$ cm.
La profondeur de l'eau dans le bassin est donc égale à $50 \text{ cm} - 20 \text{ cm}$, ou 30 cm.



RÉPONSE : (C)

19. Un nombre est *Beprisque* s'il est le seul nombre naturel situé entre un nombre premier et un carré parfait (p. ex., 10 est Beprisque, mais 12 ne l'est pas). Combien y a-t-il de nombres de deux chiffres qui sont Beprisque, incluant le nombre 10?

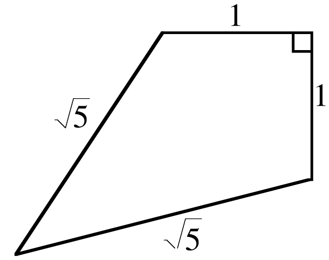
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution
On cherche les suites de trois entiers consécutifs du genre $\{C, B, P\}$ ou $\{P, B, C\}$, où C est un carré parfait et P est un nombre premier. B est alors un nombre Beprisque.
Puisque B doit être un nombre de deux chiffres, $P \neq 2$. Donc P, qui est un nombre premier, doit être impair. C doit aussi être impair, puisqu'il est deux de plus ou deux de moins que P.
On examine les possibilités à partir des carrés parfaits impairs 9, 25, 49 et 81 : $\{9, \mathbf{10}, 11\}$,
$\{23, \mathbf{24}, 25\}$, $\{25, 26, 27\}$, $\{47, \mathbf{48}, 49\}$, $\{49, 50, 51\}$, $\{79, \mathbf{80}, 81\}$, $\{81, \mathbf{82}, 83\}$
Les nombres Beprisque sont en caractères gras. Il y a en a cinq. RÉPONSE : (E)

20. L'aire du quadrilatère illustré est égale à :

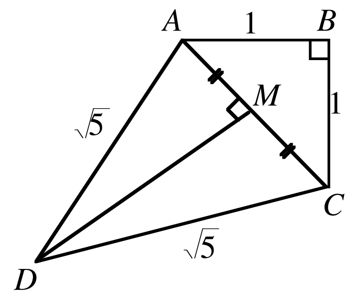
(**A**) $\frac{3}{2}$ (**B**) $\sqrt{5}$ (**C**) $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$

(**D**) 2 (**E**) 3



Solution 1

Soit A, B, C et D les points indiqués dans le diagramme. On joint A et C. Puisque le triangle ABC est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AC = \sqrt{2}$. Puisque le triangle ACD est isocèle, la médiane DM est aussi une hauteur. Puisque $AC = \sqrt{2}$, alors $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Dans le triangle rectangle ADM, on a $AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $DA = \sqrt{5}$. On utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $DM = \frac{3}{\sqrt{2}}$. L'aire du quadrilatère est égale à :

Aire du triangle ADC + Aire du triangle ABC

$$= \frac{1}{2}(AC)(DM) + \frac{1}{2}(AB)(AC)$$

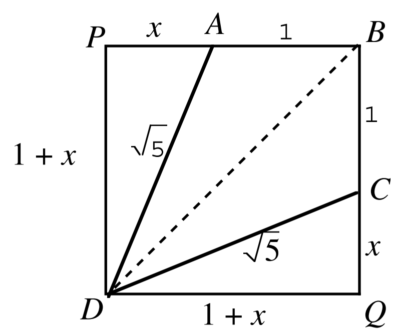
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}(1)(1)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

Solution 2

Le quadrilatère $ABCD$ est symétrique par rapport à sa diagonale BD. Si on prolonge les côtés BA et BC pour former un rectangle $BQDP$, on a, par symétrie, $PB = QB$ et $BQDP$ est donc un carré.



Soit $AP = x$. Donc $QC = x$. On a alors $PD = QD = 1 + x$.

Puisque le triangle CDQ est rectangle, on a, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 + x^2 &= \left(\sqrt{5}\right)^2 \\
1 + 2x + x^2 + x^2 &= 5 \\
2x^2 + 2x - 4 &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x+2)(x-1) &= 0 \\
x = -2 \text{ ou } x &= 1
\end{aligned}$$

On rejète $x = -2$ car $x > 0$.
Aire de $ABCD$ = Aire du carré $BQDP$ − aire des deux triangles

$$= 2 \times 2 - 2 \times \frac{1}{2}(2)(1)$$
$$= 2$$

RÉPONSE : (D)

Partie C

21. On forme un nombre en utilisant les chiffres 1, 2, ..., 9. N'importe quel chiffre peut être utilisé plus d'une fois, mais deux chiffres en positions adjacentes doivent être différents. Lorsque deux chiffres paraissent en positions adjacentes, ces deux chiffres ne peuvent plus paraître ensemble dans le même ordre. Si on forme le plus grand nombre possible de cette façon, combien ce dernier a-t-il de chiffres?

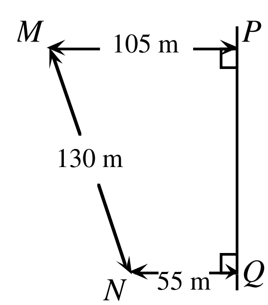
(**A**) 72 (**B**) 73 (**C**) 144 (**D**) 145 (**E**) 91

Solution
Il est possible de former 9×8, ou 72 paires différentes de chiffres en positions adjacentes.
Or un nombre de *n* chiffres contient $(n-1)$ paires de chiffres en positions adjacentes. Par exemple, le nombre de 5 chiffres, 98712, contient 4 paires de chiffres en positions adjacentes, soit 98, 87, 71 et 12.
Donc le plus grand nombre pouvant contenir 72 paires différentes de chiffres en positions adjacentes ne peut avoir plus de 73 chiffres, autrement il y aurait des répétions. Un tel nombre existe-t-il? Oui. Le plus grand est le suivant :

98 97 96 95 94 93 92 91 87 86 85 84 83 82 81 76 75 74 73 72 71 65 64 63 62 61
54 53 52 51 43 42 41 32 31 21 9.

On peut vérifier qu'il contient 73 chiffres. RÉPONSE : (B)

22. Un pipeline passe aux points P et Q. À partir d'un point T, sur PQ, un tuyau d'alimentation se rend à une maison située au point M et un deuxième tuyau d'alimentation se rend à une maison située au point N. Quelle est la longueur totale minimale requise pour les deux tuyaux d'alimentation?



(**A**) 200 (**B**) 202 (**C**) 198
(**D**) 210 (**E**) 214

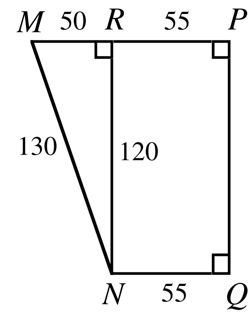
Solution

On trace le point R pour former le rectangle $RPQN$.

Donc $MR = 105 - 55$
$= 50$.

Puisque le triangle MRN est rectangle, on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $RN = 120$.

Donc $PQ = 120$.

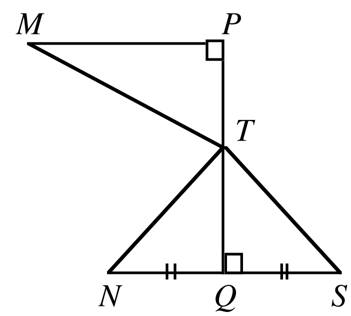


Soit S le symétrique de N par rapport à PQ.

On trace les segments TM, TN et TS.

Les triangles rectangles TNQ et TSQ ont un côté commun et deux côtés congruents. Ils sont donc congruents et alors $TN = TS$.

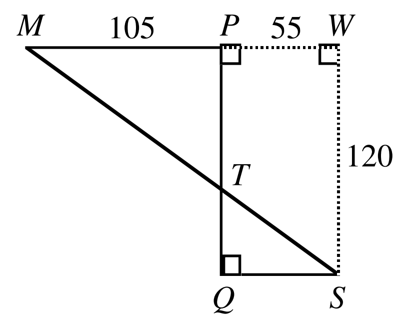
La longueur totale des deux tuyaux d'alimentation est égale à $MT + TN$, ou $MT + TS$.



Or $MT + TS$ est un minimum lorsque les points M, T et S sont alignés. On a alors $MT + TS = MS$.

Soit le triangle rectangle MSW illustré.

Selon le théorème de Pythagore, $MS = \sqrt{160^2 + 120^2}$
$= 200$.



RÉPONSE : (A)

23. Combien d'entiers peut-on exprimer comme une somme de trois nombres distincts choisis dans l'ensemble {4, 7, 10, 13, …, 46}?

(**A**) 45 (**B**) 37 (**C**) 36 (**D**) 43 (**E**) 42

Solution

Chacun des nombres de l'ensemble est de la forme $1 + 3n$, où $n = 1, 2, 3, ..., 15$. La somme de trois nombres distincts sera donc de la forme $3 + 3k + 3l + 3m$ ou $3(1 + k + l + m)$, k, l et m étant choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 15\}$. Le problème est donc équivalent au problème suivant qui est plus facile : « Combien d'entiers différents peut-on former en additionnant trois nombres de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., 15\}$? »

La plus petite somme est $1 + 2 + 3$, ou 6 et la plus grande somme est $13 + 14 + 15$, ou 42.

Il est possible d'obtenir chaque somme de 6 à 42 :

a) en remplaçant un des entiers par l'entier suivant pour augmenter la somme de 1 ou
b) en remplaçant un des entiers par l'entier précédent pour diminuer la somme de 1.

Le nombre total de sommes distinctes est donc égal à $42-5$, ou 37. RÉPONSE : (B)

24. La somme des valeurs de x qui vérifient l'équation $\left(x^2-5x+5\right)^{x^2+4x-60}=1$ est égale à :

(**A**) -4 (**B**) 3 (**C**) 1 (**D**) 5 (**E**) 6

Solution
On peut considérer trois cas.

1er cas La base est égale à 1.
On a alors $x^2-5x+5=1$.
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$x=1 \text{ ou } x=4$$
Ces deux valeurs de x vérifient l'équation donnée.

2e cas L'exposant est égal à 0.
On a alors $x^2+4x-60=0$.
$$(x+10)(x-6)=0$$
$$x=-10 \text{ ou } x=6$$
On peut vérifier que $x=-10$ et $x=6$ ne sont pas des racines de $x^2-5x+5=0$, ce qui fait que nous n'avons pas la forme indéterminée 0^0.

3e cas La base est égale à –1 et l'exposant est pair.
On a alors $x^2-5x+5=-1$ et $x^2+4x-60$ est pair.
$$x^2-5x+5=-1$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x=2 \text{ ou } x=3$$
Si $x=2$, alors $x^2-4x-60$ est pair et $x=2$ est donc une solution.
Si $x=3$, alors $x^2-4x-60$ est impair et $x=3$ ***n'est pas*** une solution.
La somme des solutions est $1+4-10+6+2$, ou 3. RÉPONSE : (B)

25. Soit $a=3^p$, $b=3^q$, $c=3^r$ et $d=3^s$, où p, q, r et s sont des entiers positifs. Déterminer la plus petite valeur de $p+q+r+s$ telle que $a^2+b^3+c^5=d^7$.

(**A**) 17 (**B**) 31 (**C**) 106 (**D**) 247 (**E**) 353

Solution
On reporte $a=3^p$, $b=3^q$, $c=3^r$ et $d=3^s$ dans l'équation $a^2+b^3+c^5=d^7$ pour obtenir $3^{2p}+3^{3q}+3^{5r}=3^{7s}$.

Dans le membre de gauche, on met en évidence la plus petite puissance de 3, disons 3^{2p} :
$3^{2p}\left(1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}\right)=3^{7s}$

Le facteur $1+3^{3q-2p}+3^{5r-2p}$ doit être une puissance de 3. Ceci n'est vrai que si $3^{3q-2p}=1$ et $3^{5r-2p}=1$, c'est-à-dire si $3q-2p=0$ et $5r-2p=0$. Donc $2p=3q=5r$ et ces trois exposants doivent donc être un multiple de 30, disons 30m.

On a donc $3^{30m}+3^{30m}+3^{30m}=3^{7s}$.

$$(3)\left(3^{30m}\right)=3^{7s}$$

$$3^{30m+1}=3^{7s}$$

On cherche donc les plus petits entiers, m et s, tels que $30m+1=7s$.

En posant $m=1, 2, 3, 4, \ldots$, on obtient $m=3$ et $s=13$.

Donc $2p=90$, $3q=90$, $5r=90$ et $7s=91$, d'où $p=45$, $q=30$, $r=18$ et $s=13$.

Donc $p+q+r+s=45+30+18+13$, ou 106. RÉPONSE : (C)