Anniversaire
1963 – 1998

Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1998 Solutions
Concours Pascal (9e - Sec. III)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A :

1. La valeur de $\frac{1+3+5}{10+6+2}$ est :

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $1\frac{1}{2}$ (**E**) $3\frac{1}{10}$

Solution 1

$$\begin{aligned}\frac{1+3+5}{10+6+2} &= \frac{9}{18}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Solution 2

$$\begin{aligned}\frac{1+3+5}{10+6+2} &= \frac{(1+3+5)}{2(5+3+1)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

2. Si $3(x-5)=3(18-5)$, alors x est égal à :

(**A**) $\frac{44}{3}$ (**B**) $\frac{32}{3}$ (**C**) 9 (**D**) 18 (**E**) 81

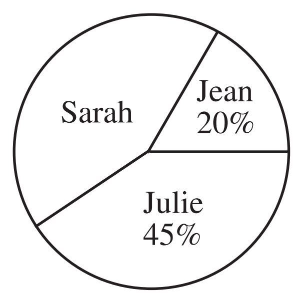
Solution

Puisque $3(x-5)=3(18-5)$, on peut diviser chaque membre de l'équation par 3 pour obtenir $(x-5)=(18-5)$.

Donc $x=18$. RÉPONSE : (D)

3. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?

(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935



Solution

Le pourcentage des votes reçus par Sarah est égal à $100-(20+45)$, c'est-à-dire à 35. Or 35 % de 1000 est égal à $0,35(1000)$, c'est-à-dire à 350. Sarah a reçu 350 votes.

RÉPONSE : (B)

4. La valeur de $\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)^2$ est :

(**A**) 64 (**B**) 8 (**C**) 16 (**D**) 144 (**E**) 12

Solution

$$\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)^2 = (13-5)^2$$
$$= 8^2$$
$$= 64$$

RÉPONSE : (A)

5. La valeur de $\dfrac{5^6 \times 5^9 \times 5}{5^3}$ est :

(**A**) 5^{18} (**B**) 25^{18} (**C**) 5^{13} (**D**) 25^{13} (**E**) 5^{51}

Solution

$$\frac{5^6 \times 5^9 \times 5}{5^3} = \frac{5^{16}}{5^3}$$
$$= 5^{13}$$

RÉPONSE : (C)

6. Si $x = 3$, laquelle des expressions suivantes représente un nombre pair?

(**A**) $9x$ (**B**) x^3 (**C**) $2\left(x^2+9\right)$ (**D**) $2x^2+9$ (**E**) $3x^2$

Solution 1

Puisque l'expression $2\left(x^2+9\right)$ a 2 pour facteur, elle donnera un nombre pair, quelle que soit la valeur entière de *x*.

Solution 2

Si $x = 3$, alors $9x = 27$, $x^3 = 27$, $2\left(x^2+9\right) = 36$, $2x^2+9 = 27$ et $3x^2 = 27$.

L'expression $2\left(x^2+9\right)$ est donc la seule qui représente un nombre pair lorsque $x = 3$.

RÉPONSE : (C)

7. La valeur de $490-491+492-493+494-495+\ldots-509+510$ est :

(**A**) 500 (**B**) -10 (**C**) -11 (**D**) 499 (**E**) 510

Solution

$$490-491+492-493+494-495+\ldots-509+510$$
$$=(490-491)+(492-493)+(494-495)+\ldots+(508-509)+510$$
$$=\underbrace{(-1)+(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{\text{10 parenthèses}}+510$$
$$=-10+510$$
$$=500$$

RÉPONSE : (A)

8. La moyenne d'une liste de 10 nombres est 0. Si on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la nouvelle moyenne sera égale à :

(**A**) 30 (**B**) 6 (**C**) 0 (**D**) 60 (**E**) 5

Solution

Puisque la moyenne des 10 nombres est 0, la somme de ces nombres est égale à 10×0 ou 0. Lorsqu'on ajoute les nombres 72 et –12 à la liste, la somme des 12 nombres est égale à $0 + 72 + (-12)$, c'est-à-dire à 60.

La nouvelle moyenne est donc égale à $60 \div 12$, c'est-à-dire à 5. RÉPONSE : (E)

9. Quelle est la moitié de $1,2 \times 10^{30}$?

(**A**) $6,0 \times 10^{30}$ (**B**) $6,0 \times 10^{29}$ (**C**) $0,6 \times 5^{30}$ (**D**) $1,2 \times 10^{15}$ (**E**) $1,2 \times 5^{30}$

Solution

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(1,2 \times 10^{30}\right) &= 0,6 \times 10^{30} \\ &= 0,6 \times 10 \times 10^{29} \\ &= 6,0 \times 10^{29}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (B)

10. Si $x + y + z = 25$ et $y + z = 14$, alors x est égal à :

(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 6 (**D**) -6 (**E**) 31

Solution

Puisque $y + z = 14$, la première équation devient $x + 14 = 25$.

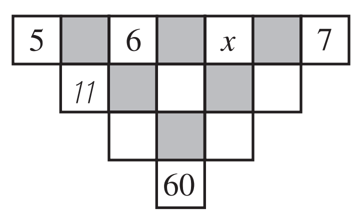
Donc $x = 11$. RÉPONSE : (B)

PARTIE B :

11. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '11' a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9

(**D**) 15 (**E**) 10



Solution

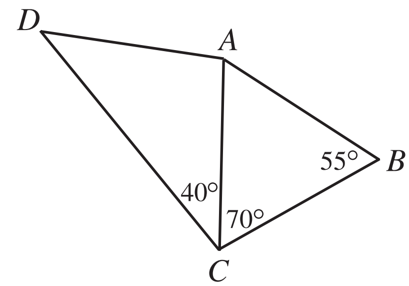
De gauche à droite, les trois nombres des cases blanches de la deuxième rangée sont 11, $6 + x$ et $x + 7$. De gauche à droite, les deux nombres des cases blanches de la troisième rangée sont $11 + (6 + x)$ et $(6 + x) + (x + 7)$, c'est-à-dire $17 + x$ et $2x + 13$. Le nombre de la quatrième rangée est $(17 + x) + (2x + 13)$, c'est-à-dire $3x + 30$. Donc :

$$3x + 30 = 60$$
$$3x = 30$$
$$x = 10$$

RÉPONSE : (E)

12. Dans le diagramme, $DA = CB$. Quelle est la mesure de $\angle DAC$?

(**A**) 70° (**B**) 100° (**C**) 95°
(**D**) 125° (**E**) 110°



Solution

Dans le triangle ABC :
$$\angle BAC = 180° - (70° + 55°)$$
$$= 55°$$
Puisque $\angle BAC = \angle ABC$, le triangle ABC est isocèle et $AC = CB$.
Puisque $DA = CB$ et $AC = CB$, alors $DA = AC$ et le triangle ADC est donc isocèle.
Donc $\angle ADC = \angle ACD$ et alors $\angle ADC = 40^\circ$.
Donc $\angle DAC = 180^\circ - \left(40^\circ + 40^\circ\right)$
$= 100^\circ$.

RÉPONSE : (B)

13. Une voiture à trois roues parcourt 100 km. La voiture a deux roues de rechange. Pendant ce trajet, si chacune des cinq roues est utilisée sur une même distance, combien de kilomètres chaque roue parcourt-elle?

(**A**) 20 (**B**) 25 (**C**) $33\frac{1}{3}$ (**D**) 50 (**E**) 60

Solution

Puisqu'il y a toujours trois roues qui roulent à la fois, la distance totale parcourue par les roues est égale à 3×100 km, c'est-à-dire à 300 km. Puisque chacune des cinq roues est utilisée sur une même distance et que $300 \div 5 = 60$, chacune parcourt 60 km. RÉPONSE : (E)

14. La somme des chiffres d'un nombre entier positif de cinq chiffres est égale à 2. (Un nombre entier de cinq chiffres ne peut pas commencer par un zéro.) Combien y a-t-il de tels entiers?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

Puisque la somme des chiffres est égale à 2, les seules possibilités sont 20 000, 11 000, 10 100, 10 010 et 10 001. Il y a en a cinq. RÉPONSE : (E)

15. Le diagramme montre quatre points sur un segment de droite. Si $AB : BC = 1:2$ et $BC:CD = 8:5$, alors $AB : BD$ est égal à :

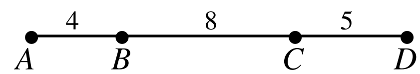
(**A**) $4:13$ (**B**) $1:13$ (**C**) $1:7$
(**D**) $3:13$ (**E**) $4:17$

Solution

Pour comparer les rapports, il faut écrire $AB : BC = 1:2$ sous la forme $AB:BC = 4:8$, de manière que les deux rapports, $AB:BC = 4:8$ et $BC:CD = 8:5$, indiquent que $BC = 8$ unités.

On peut donc écrire $AB : BC : CD = 4:8:5$.

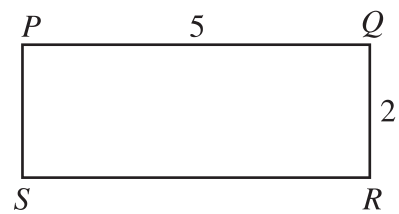
Comme dans le diagramme ci-contre, on a $AB = 4$ unités, $BC = 8$ unités et $CD = 5$ unités.



Donc $AB:BD = 4:13$.

RÉPONSE : (A)

16. Le diagramme illustre une table de billard de forme rectangulaire. La table a une longueur de 5 unités et une largeur de 2 unités. À partir du point *P*, on fait rouler une boule à un angle de $45°$ par rapport à PQ. La boule ira rebondir sur SR. La boule rebondit plusieurs fois, sur divers côtés, à un angle de $45°$, jusqu'à ce qu'elle arrive au point *S*. Combien de fois la boule rebondit-elle avant d'arriver à *S*?

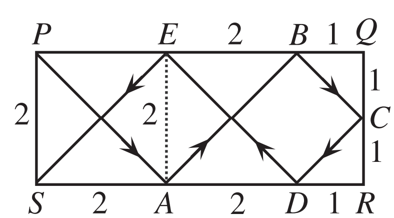


(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 5 (**E**) 4

Solution

Puisque la balle rebondit toujours à un angle de $45°$, son trajet forme des triangles rectangles isocèles, comme dans le diagramme. La balle part du point *P*, puis elle rebondit aux points *A*, *B*, *C*, *D* et *E* avant d'arriver au point *S*.

Elle rebondit donc 5 fois.



RÉPONSE : (D)

17. Soit *p*, *q* et *r* des nombres premiers tels que $1998 = p^s q^t r^u$. Quelle est la valeur de $p+q+r$?

(**A**) 222 (**B**) 48 (**C**) 42 (**D**) 66 (**E**) 122

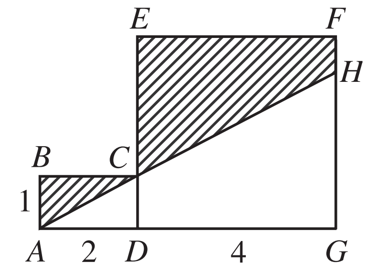
Solution

La factorisation première de 1998 est $2 \times 3^3 \times 37$. Les nombres *p*, *q* et *r* ont donc les valeurs respectives de 2, 3 et 37. Donc $p+q+r = 42$.

RÉPONSE : (C)

18. Le diagramme illustre un carré $DEFG$ et un rectangle $ABCD$. On a tracé un segment de droite à partir du point A, en passant au point C, jusqu'au point H sur FG. L'aire de la région ombrée est égale à :

(**A**) 8 (**B**) 8,5 (**C**) 10
(**D**) 9 (**E**) 10,5



Solution

Les points A, C et H sont alignés. Les triangles ADC et AGH sont donc semblables.
Puisque $AD : DC = 2:1$, alors $AG : GH = 2:1$. Puisque $AG = 6$, alors $GH = 3$.
Aire de la région ombrée = aire de $ABCD$ + aire de $DEFG$ − aire du triangle AGH

$$= 2 \times 1 + 4 \times 4 - \frac{3 \times 6}{2}$$
$$= 2 + 16 - 9$$
$$= 9$$

RÉPONSE : (D)

19. On utilise seulement les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour former une suite de nombres comme suit : un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, cinq 5, six 1, sept 2, ainsi de suite.
Voici le début de la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Le 100^e nombre de la suite est :

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

Le nombre total de nombres dans les n premiers groupes de la suite est égal à $1+2+3+...+n$. Pour déterminer le 100^e nombre de la suite, on doit d'abord déterminer la valeur de n pour laquelle la somme est près de 100.
Or $1+2+3+...+n = \frac{n \times (n+1)}{2}$. Cette formule nous permet d'obtenir rapidement, par tâtonnement, $1+2+3+...+13 = 91$ et $1+2+3+...+13+14 = 105$.
Le 100^e nombre de la suite est donc situé dans le 14^e groupe. Il s'agit donc d'un 4.

RÉPONSE : (D)

20. Si on parcourt la distance entre deux villes à une vitesse de 110 km/h, au lieu de 100 km/h, on épargne 9 minutes. La distance entre les deux villes, en kilomètres, est égale à :

(**A**) 210 (**B**) 99 (**C**) 165 (**D**) 9900 (**E**) 150

Solution

On peut écrire l'énoncé sous la forme suivante :
(durée du parcours à 100 km/h) – (durée du parcours à 110 km/h) = 9 minutes ou

(durée du parcours à 100 km/h) – (durée du parcours à 110 km/h) = $\frac{9}{60}$ heure (1)

Soit d la distance, en kilomètres, entre les deux villes.

On peut exprimer la relation entre la distance d, la vitesse v et le temps t écoulé au moyen de la formule $d = v \times t$ que l'on peut transformer sous la forme $v = \frac{d}{t}$ ou $t = \frac{d}{v}$.

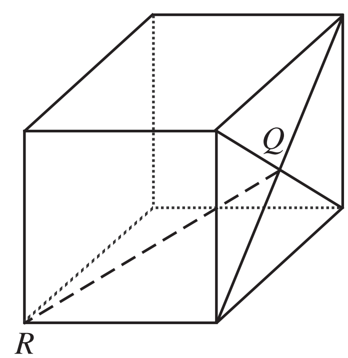
D'après cette dernière forme, la durée du parcours à 100 km/h est égale à $\frac{d}{100}$ et la durée du parcours à 110 km/h est égale à $\frac{d}{110}$. On peut donc écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{d}{100} - \frac{d}{110} = \frac{9}{60}$$
$$\frac{d}{10} - \frac{d}{11} = \frac{9}{6}$$
$$\frac{d}{110} = \frac{3}{2}$$
$$d = \frac{3}{2} \times 110$$
$$d = 165$$

La distance entre les deux villes est égale à 165 km. RÉPONSE : (C)

PARTIE C :

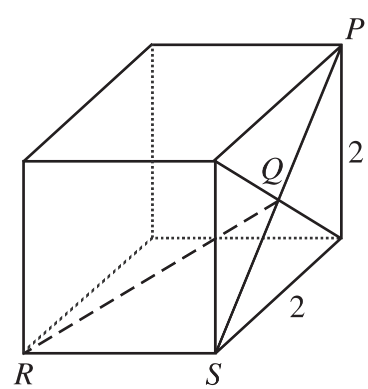
21. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :



(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$

Solution

On considère les points P et S illustrés dans le diagramme. Sachant que les arêtes ont une longueur de 2 unités, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale PS.



$$PS^2 = 2^2 + 2^2$$
$$PS^2 = 8$$
$$PS = \sqrt{8} \text{ ou } 2\sqrt{2}$$

Donc $QS = \frac{\sqrt{8}}{2}$ ou $\sqrt{2}$.

Puisqu'il s'agit d'un cube, le triangle QRS est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$QR^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad QR^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$QR^2 = 4 + \frac{8}{4} \qquad\qquad QR^2 = 4 + 2$$

$$QR^2 = 6 \qquad\qquad QR^2 = 6$$

$$QR = \sqrt{6} \qquad\qquad QR = \sqrt{6}$$

RÉPONSE : (E)

22. Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Combien de cartes montrent une face rouge à la fin?

(**A**) 83 (**B**) 17 (**C**) 66 (**D**) 50 (**E**) 49

Solution

Au début, toutes les cartes montrent une face rouge. Après avoir retourné chaque carte portant un nombre divisible par 2, seules les 50 cartes portant un nombre impair montrent une face rouge.

La deuxième fois, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Les cartes portant un numéro impair divisible par 3 passeront alors du rouge au jaune. Il y a 17 tels numéros, soit 3, 9, 15, 21, …, 93 et 99. De plus, les cartes portant un numéro pair divisible par 3 passeront du jaune au rouge. Il y a 16 tels numéros, soit 6, 12, 18, 24, …, 90 et 96.

À la fin, les cartes montrant une face rouge sont les 50 cartes portant un numéro impair, moins les 17 cartes portant un numéro impair divisible par 3, plus les 16 cartes portant un numéro pair divisible par 3.

Le nombre de telles cartes est égal à $50 - 17 + 16$, c'est-à-dire 49. RÉPONSE : (E)

23. On multiplie les nombres $123\,456\,789$ et $999\,999\,999$. Combien des chiffres de la réponse sont des 9?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 17

Solution

On récrit la multiplication sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(123\,456\,789)(999\,999\,999) &= (123\,456\,789)\left(10^9 - 1\right)\\ &= (123\,456\,789)\times 10^9 - (123\,456\,789)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{array}{r} 123\,456\,789\,000\,000\,000 \\ -\qquad\qquad\quad 123\,456\,789 \\ \hline 123\,456\,788\,876\,543\,211 \end{array}$$

Il n'y a aucun chiffre 9 dans la réponse. RÉPONSE : (A)

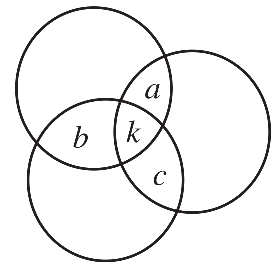
24. Trois tapis ont une aire totale de $200\ \text{m}^2$. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de $140\ \text{m}^2$. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de $24\ \text{m}^2$. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) $12\ \text{m}^2$ (**B**) $18\ \text{m}^2$ (**C**) $24\ \text{m}^2$ (**D**) $36\ \text{m}^2$ (**E**) $42\ \text{m}^2$

Solution

On illustre les trois tapis comme dans le diagramme. $a+b+c$ représente l'aire de la surface recouverte par exactement deux tapis et k représente l'aire de la surface recouverte par trois tapis.

On donne $a+b+c=24$ (1).



Puisque les trois tapis ont une aire totale de $200\ \text{m}^2$ et puisqu'ils recouvrent une surface de $140\ \text{m}^2$ lorsqu'ils sont partiellement superposés, il y a alors une surface de $60\ \text{m}^2$ qui est « gaspillée » par les deux ou trois couches de tapis superposés.

Donc $a+b+c+2k=60$ (2). On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $2k=36$, d'où $k=18$.

L'aire de la surface recouverte par trois tapis est donc égale à $18\ \text{m}^2$. RÉPONSE : (B)

25. On veut placer 10 000 cercles, ayant chacun un diamètre de 1, dans un carré mesurant 100 sur 100. On peut le faire en plaçant les cercles en 100 rangées de 100 cercles. Si on place plutôt les cercles de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral, quel est le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer?

(**A**) 647 (**B**) 1442 (**C**) 1343 (**D**) 1443 (**E**) 1344

Solution

Pour commencer, on retire un cercle de chaque deuxième rangée et on déplace ces rangées de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral. Le diagramme illustre quelques-uns de ces cercles. Puisque chaque cercle a un diamètre de 1, les triangles PQR et PXY sont équilatéraux avec des côtés de longueur 1.

Dans le triangle PQR, on abaisse la hauteur PS.

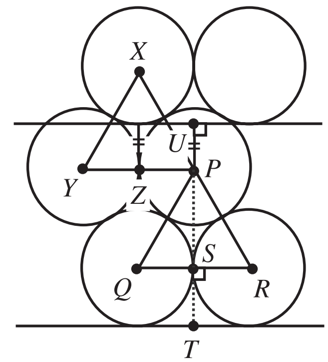
Le triangle *PRS* est rectangle. D'après le triangle de Pythagore, on a :

$$PS^2 = (1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$PS^2 = \frac{3}{4}$$

$$PS = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De même, $XZ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Puisque chaque cercle a un rayon de $\frac{1}{2}$, alors $PU = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ et $TU = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $TU = \sqrt{3}$. Ayant placé deux rangées de cercles, ceux-ci occupent donc une hauteur de $\sqrt{3}$ avant de permettre le placement d'une troisième rangée. Cette hauteur est la hauteur entre les lignes horizontales du diagramme. Or $\frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,7$.

On peut placer 57 rangées doubles, chaque rangée double contenant $100 + 99 = 199$ cercles.
Est-il possible de placer une rangée additionnelle? Oui. Le carré a des côtés de longueur 100, tandis que les 57 rangées doubles occupent une hauteur de $57\sqrt{3}$ et $57\sqrt{3} \approx 98,7$. Il reste donc assez de place pour une rangée additionnelle de 100 cercles.
Le nombre total de cercles que l'on peut placer est égal à $57(199) + 100$, c'est-à-dire à 11 443.
Le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer est égal à $11\,443 - 10\,000$, c'est-à-dire à 1443.

RÉPONSE : (D)