Concours canadien de mathématiques

Anniversaire 1963 – 1998

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

1998 Solutions
Concours Fermat (11e - Sec. V)

BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A :

1. La valeur de $\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10}$ est :

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) 2,5 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{11}{26}$ (**E**) $\frac{3}{8}$

Solution 1

$$\begin{aligned}\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10} &= \frac{15}{30}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

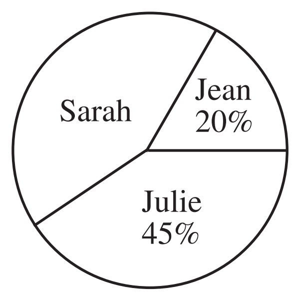
Solution 2

$$\begin{aligned}\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10} &= \frac{(1+2+3+4+5)}{2(1+2+3+4+5)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

RÉPONSE : (C)

2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?

(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935



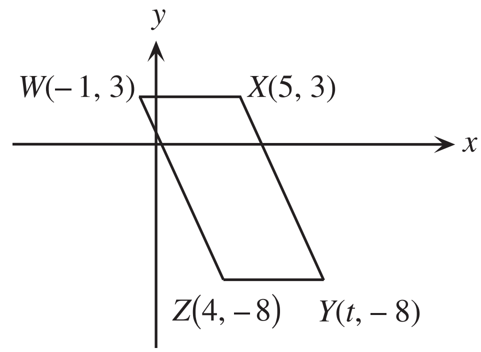
Solution

Le pourcentage des votes reçus par Sarah est égal à $100-(20+45)$, c'est-à-dire à 35. Or 35 % de 1000 est égal à $0,35(1000)$, c'est-à-dire à 350. Sarah a reçu 350 votes.

RÉPONSE : (B)

3. Si $WXYZ$ est un parallélogramme, alors t est égal à :

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 11 (**E**) 12



Solution
Puisque $WXYZ$ est un parallélogramme, ses côtés opposés sont de la même longueur.
La longueur du côté WX est égale à $5-(-1)$, c'est-à-dire 6.
Puisque $WX = ZY$, alors $t-4=6$, d'où $t=10$. RÉPONSE : (C)

4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?

(**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

Solution
Les paires d'entiers positifs dont le produit est égal à 100 sont : 1 et 100, 2 et 50, 4 et 25, 5 et 20, 10 et 10. La paire 1 et 100 donne la plus grande somme. La plus grande valeur possible de $p+q$ est 101. RÉPONSE : (B)

5. On définit une nouvelle opération $\otimes$, entre deux nombres p et q, comme suit : $p \otimes q = p^2 - 2q$. Quelle est la valeur de $7 \otimes 3$?

(**A**) 43 (**B**) 8 (**C**) 141 (**D**) 36 (**E**) 26

Solution
D'après la définition de la nouvelle opération $\otimes$, on a :

$$\begin{aligned} 7 \otimes 3 &= 7^2 - 2(3) \\ &= 49 - 6 \\ &= 43 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (A)

6. La valeur de $\frac{1}{3}$ de 6^{30} est :

(**A**) 6^{10} (**B**) 2^{30} (**C**) 2^{10} (**D**) 2×6^{29} (**E**) 2×6^{10}

Solution

$$\frac{1}{3}\times 6^{30} = \frac{1}{3}\times 6\times 6^{29}$$
$$= 2\times 6^{29}$$

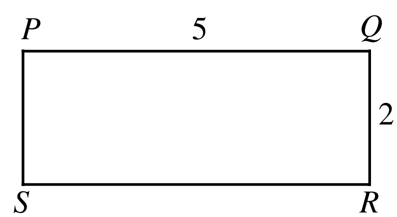
RÉPONSE : (D)

7. La moyenne d'une liste de 10 nombres est 0. Si on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la nouvelle moyenne sera égale à :
(**A**) 30 (**B**) 6 (**C**) 0 (**D**) 60 (**E**) 5

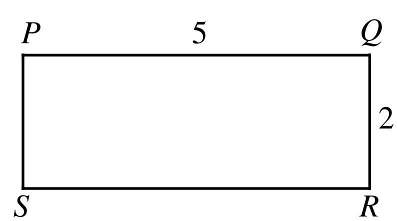
Solution
Puisque la moyenne des 10 nombres est 0, la somme de ces nombres est égale à 10×0 ou 0. Lorsqu'on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la somme des 12 nombres est égale à $0+72+(-12)$, c'est-à-dire à 60.
La nouvelle moyenne est donc égale à $60 \div 12$, c'est-à-dire à 5.

RÉPONSE : (E)

8. Le diagramme illustre une table de billard de forme rectangulaire. La table a une longueur de 5 unités et une largeur de 2 unités. À partir du point *P*, on fait rouler une boule à un angle de $45°$ par rapport à PQ. La boule ira rebondir sur SR. La boule rebondit plusieurs fois, sur divers côtés, à un angle de $45°$, jusqu'à ce qu'elle arrive au point *S*. Combien de fois la boule rebondit-elle avant d'arriver à *S*?
(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7
(**D**) 5 (**E**) 4

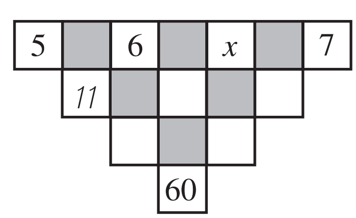


Solution
Puisque la balle rebondit toujours à un angle de $45°$, son trajet forme des triangles rectangles isocèles, comme dans le diagramme. La balle part du point *P*, puis elle rebondit aux points *A*, *B*, *C*, *D* et *E* avant d'arriver au point *S*.
Elle rebondit donc 5 fois.



RÉPONSE : (D)

9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '11' a été obtenu de cette façon.) La valeur de *x* est :
(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9
(**D**) 15 (**E**) 10



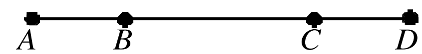
Solution

De gauche à droite, les trois nombres des cases blanches de la deuxième rangée sont 11, $6+x$ et $x+7$. De gauche à droite, les deux nombres des cases blanches de la troisième rangée sont $11+(6+x)$ et $(6+x)+(x+7)$, c'est-à-dire $17+x$ et $2x+13$. Le nombre de la quatrième rangée est $(17+x)+(2x+13)$, c'est-à-dire $3x+30$. Donc :

$$\begin{aligned} 3x+30&=60\\ 3x&=30\\ x&=10 \end{aligned}$$

RÉPONSE : (E)

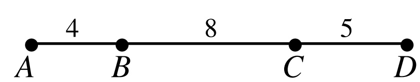
10. Le diagramme montre quatre points sur un segment de droite. Si $AB:BC=1:2$ et $BC:CD=8:5$, alors $AB:BD$ est égal à :



(**A**) $4:13$ (**B**) $1:13$ (**C**) $1:7$
(**D**) $3:13$ (**E**) $4:17$

Solution

Pour comparer les rapports, il faut écrire $AB:BC=1:2$ sous la forme $AB:BC=4:8$, de manière que les deux rapports, $AB:BC=4:8$ et $BC:CD=8:5$, indiquent que $BC=8$ unités.
On peut donc écrire $AB:BC:CD=4:8:5$.
Comme dans le diagramme ci-contre, on a $AB=4$ unités, $BC=8$ unités et $CD=5$ unités.
Donc $AB:BD=4:13$.



RÉPONSE : (A)

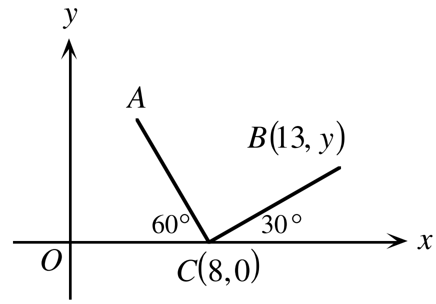
PARTIE B :

11. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l'équation $3x+y=100$ admet-elle?
(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

Solution

On récrit l'équation sous la forme $x=\frac{100-y}{3}$. Puisque x doit être un entier positif, $100-y$ doit être divisible par 3. Puisque y doit aussi être un entier positif, ses seules valeurs possibles sont 1, 4, 7, 10, 13, …, 94 et 97. Il y a donc 33 valeurs possibles de y. L'équation $3x+y=100$ admet donc 33 solutions. RÉPONSE : (A)

12. Dans le diagramme, la valeur de y est :



(**A**) $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ (**B**) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (**C**) 2

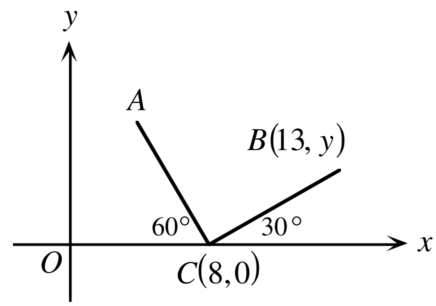
(**D**) 12 (**E**) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Solution 1

Soit le point $D(13, 0)$. Le triangle BDC est rectangle.

La pente du segment AC est égale à $\frac{4\sqrt{3}-0}{4-8}$, c'est-à-dire $-\sqrt{3}$. Puisque $\angle ACB = 90°$, AC est perpendiculaire au segment CB et celui-ci a donc une pente égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

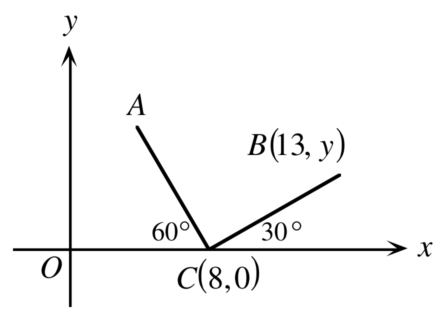
On a donc $\frac{y-0}{13-8} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $y = \frac{5}{\sqrt{3}}$.



Solution 2

Soit le point $D(13, 0)$. Le triangle BDC est rectangle. On a donc $BD = y$ et $CD = 5$. Puisque le triangle BDC est un triangle $30° - 60° - 90°$, les longueurs de ses côtés sont dans le rapport $1:\sqrt{3}:2$. Donc :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{y}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$y = \frac{5}{\sqrt{3}}$$



RÉPONSE : (B)

13. On forme des entiers de trois chiffres en n'utilisant que les chiffres 1 et/ou 2. La somme de tous les entiers que l'on peut former est égale à :

(**A**) 1332 (**B**) 333 (**C**) 999 (**D**) 666 (**E**) 1665

Solution

Seuls les nombres suivants peuvent être formés : 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 et 222.
La somme de ces nombres est égale à 1332. RÉPONSE : (A)

14. Les droites l_1, l_2 et l_3 ont pour pentes respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Les trois droites ont la même ordonnée à l'origine. Si la somme des trois abscisses à l'origine est égale à 36, alors l'ordonnée à l'origine est :

(**A**) $\frac{-13}{12}$ (**B**) $\frac{-12}{13}$ (**C**) -4 (**D**) 4 (**E**) -9

Solution

Soit b l'ordonnée à l'origine commune des trois droites. La première droite, l_1, a pour équation $y=\frac{1}{2}x+b$. Pour déterminer son abscisse à l'origine, posons $y=0$.

$$0=\frac{1}{2}x+b$$
$$x=-2b$$

Son abscisse à l'origine est égale à $-2b$.

De même, la droite l_2 a pour équation $y=\frac{1}{3}x+b$ et pour abscisse à l'origine $-3b$.

La droite l_3 a pour équation $y=\frac{1}{4}x+b$ et pour abscisse à l'origine $-4b$.

Puisque la somme des abscisses à l'origine est égale à 36, on a :

$$-2b-3b-4b=36$$
$$-9b=36$$
$$b=-4$$

L'ordonnée à l'origine est égale à -4. RÉPONSE : (C)

15. Si $-2 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 7$, $4 \le z \le 8$ et $w=xy-z$, alors la plus petite valeur que w puisse prendre est :

(**A**) -14 (**B**) -18 (**C**) -19 (**D**) -22 (**E**) -23

Solution

Puisque $w=xy-z$, on obtient la plus petite valeur de w en choisissant la plus petite valeur possible du produit xy et en soustrayant la plus grande valeur possible de z.

Puisque x et y peuvent prendre des valeurs positives et négatives, la plus petite valeur du produit xy sera négative. L'une des variables x et y prendra une valeur positive, tandis que l'autre prendra une valeur négative. On obtient le plus petit produit possible, -15, avec $x=5$ et $y=-3$.

On soustrait alors $z=8$ pour obtenir la plus petite valeur possible de w, soit $w=-15-8$ ou $w=-23$. RÉPONSE : (E)

16. Si le nombre $N=\left(7^{p+4}\right)\left(5^q\right)\left(2^3\right)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite valeur possible de $p+q$ est :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

Solution

Pour que N soit un cube parfait, il faut que chacun de ses facteurs premiers ait pour exposant un multiple de 3. La plus petite valeur possible de p est 2 et la plus petite valeur possible de q est 3. La plus petite valeur possible de $p+q$ est 5. RÉPONSE : (A)

17. On utilise seulement les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour former une suite de nombres comme suit : un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, cinq 5, six 1, sept 2, ainsi de suite.
Voici le début de la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Le 100^e nombre de la suite est :
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

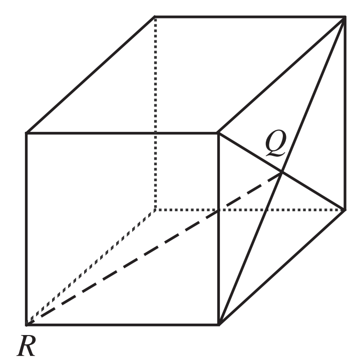
Le nombre total de nombres dans les n premiers groupes de la suite est égal à $1+2+3+...+n$. Pour déterminer le 100^e nombre de la suite, on doit d'abord déterminer la valeur de n pour laquelle la somme est près de 100.

Or $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Cette formule nous permet d'obtenir rapidement, par tâtonnement, $1+2+3+...+13=91$ et $1+2+3+...+13+14=105$.

Le 100^e nombre de la suite est donc situé dans le 14^e groupe. Il s'agit donc d'un 4.

RÉPONSE : (D)

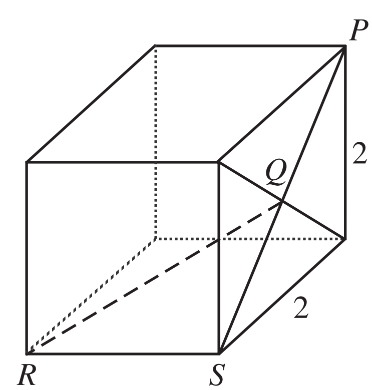
18. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :
(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$



Solution

On considère les points P et S illustrés dans le diagramme. Sachant que les arêtes ont une longueur de 2 unités, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale PS.

$$PS^2 = 2^2 + 2^2$$
$$PS^2 = 8$$
$$PS = 2\sqrt{2}$$



Puisque Q est le milieu du segment PS, alors $QS=\sqrt{2}$.

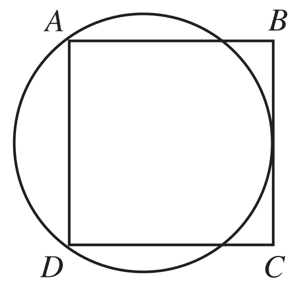
Puisqu'il s'agit d'un cube, le triangle QRS est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$QR^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$QR^2 = 6$$
$$QR = \sqrt{6}$$

RÉPONSE : (E)

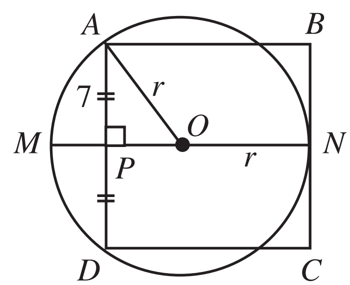
19. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 14. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?

(**A**) 8,5 (**B**) 8,75 (**C**) 9
(**D**) 9,25 (**E**) 9,5



Solution

Soit r le rayon du cercle et O son centre. Soit MN le diamètre qui coupe le côté AD perpendiculairement en son milieu P. On joint O et A.



Puisque P est le milieu de AD, on a $AP = 7$.

Puisque $ON = r$, alors :

$$\begin{aligned} PO &= PN - ON \\ &= 14 - r \end{aligned}$$

Le triangle APO est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} r^2 &= 7^2 + (14 - r)^2 \\ r^2 &= 49 + 196 - 28r + r^2 \\ 28r &= 245 \\ r &= 8{,}75 \end{aligned}$$

Le cercle a donc un rayon de 8,75. RÉPONSE : (B)

20. Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Combien de cartes montrent une face rouge à la fin?

(**A**) 83 (**B**) 17 (**C**) 66 (**D**) 50 (**E**) 49

Solution

Au début, toutes les cartes montrent une face rouge. Après avoir retourné chaque carte portant un nombre divisible par 2, seules les 50 cartes portant un nombre impair montrent une face rouge.

La deuxième fois, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Les cartes portant un numéro impair divisible par 3 passeront alors du rouge au jaune. Il y a 17 tels numéros, soit 3, 9, 15, 21, …, 93 et 99. De plus, les cartes portant un numéro pair divisible par 3 passeront du jaune au rouge. Il y a 16 tels numéros, soit 6, 12, 18, 24, …, 90 et 96.

À la fin, les cartes montrant une face rouge sont les 50 cartes portant un numéro impair, moins les 17 cartes portant un numéro impair divisible par 3, plus les 16 cartes portant un numéro pair divisible par 3. Le nombre de telles cartes est égal à $50 - 17 + 16$, c'est-à-dire 49. RÉPONSE : (E)

PARTIE C :

21. On multiplie les nombres $123\,456\,789$ et $999\,999\,999$. Combien des chiffres de la réponse sont des 9?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 17

Solution

On récrit la multiplication sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(123\,456\,789)(999\,999\,\,999) &= (123\,456\,789)(10^9-1)\\ &= (123\,456\,789)\times 10^9-(123\,456\,789)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{array}{r} 123\,456\,789\,000\,000\,000\\ -\qquad\qquad 123\,456\,789\\ \hline 123\,456\,788\,876\,543\,211\end{array}$$

Il n'y a aucun chiffre 9 dans la réponse. RÉPONSE : (A)

22. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N=5a+3b+5c$. De plus, $N=4a+5b+4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a+b+c$?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

Solution

On a $N=5a+3b+5c$ (1) et $N=4a+5b+4c$ (2).

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 4 pour obtenir $4N=20a+12b+20c$ (3).

On multiplie chaque membre de l'équation (2) par 5 pour obtenir $5N=20a+25b+20c$ (4).

On soustrait l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $N=13b$.

Puisque N et b sont des entiers positifs, N doit être un multiple de 13.

Puisque $131<N<150$, N doit être égal à 143. Donc $143=13b$, d'où $b=11$.

On reporte $N=143$ et $b=11$ dans l'équation (1) pour obtenir :

$$\begin{aligned}143&=5a+3(11)+5c\\ 110&=5a+5c\\ 22&=a+c\end{aligned}$$

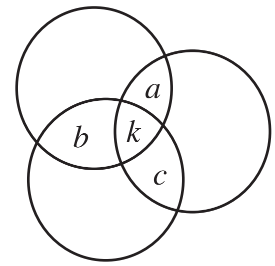
Donc la valeur de $a+b+c$ est égale à $11+22$, c'est-à-dire 33. RÉPONSE : (D)

23. Trois tapis ont une aire totale de 200 m^2. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de 140 m^2. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de 24 m^2. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) 12 m^2 (**B**) 18 m^2 (**C**) 24 m^2 (**D**) 36 m^2 (**E**) 42 m^2

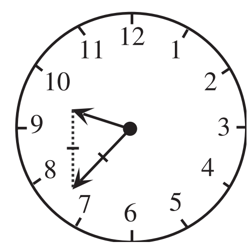
Solution

On illustre les trois tapis comme dans le diagramme. $a+b+c$ représente l'aire de la surface recouverte par exactement deux tapis et k représente l'aire de la surface recouverte par trois tapis.
On donne $a+b+c=24$ (1).



Puisque les trois tapis ont une aire totale de 200 m^2 et puisqu'ils recouvrent une surface de 140 m^2 lorsqu'ils sont partiellement superposés, il y a alors une surface de 60 m^2 qui est « gaspillée » par les deux ou trois couches de tapis superposés.
Donc $a+b+c+2k=60$ (2). On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $2k=36$, d'où $k=18$.
L'aire de la surface recouverte par trois tapis est donc égale à 18 m^2. RÉPONSE : (B)

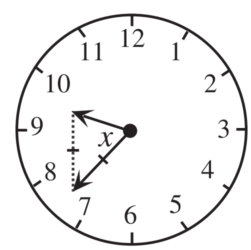
24. À un moment entre 9 h 30 et 10 h, le triangle formé par les aiguilles d'une montre est isocèle (voir le diagramme). Si chacun des angles égaux du triangle est deux fois plus grand que le troisième angle, quelle heure est-il?



(**A**) 9 h 35 (**B**) 9 h 36 (**C**) 9 h 37
(**D**) 9 h 38 (**E**) 9 h 39

Solution

Soit x la mesure de l'angle, en degrés, entre les deux aiguilles. Le triangle illustré est isocèle et chacun des angles égaux du triangle est deux fois plus grand que le troisième angle. Donc :



$$\begin{aligned} x + x + \frac{1}{2}x &= 180 \\ \frac{5}{2}x &= 180 \\ x &= 72 \end{aligned}$$

Puisque $360^\circ \div 60 = 6^\circ$, à chaque minute la grande aiguille balaie un angle de 6°.
Puisque $\left(360^\circ \div 12\right) \div 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$, à chaque minute la petite aiguille balaie un angle de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$.

À 9 h il y a un angle de 270° entre les deux aiguilles. Au moment dont on parle dans l'énoncé, il y a un angle de 72° entre les deux aiguilles. À chaque minute, la grande aiguille gagne $\left(5\frac{1}{2}\right)^\circ$ sur la petite aiguille. Puisque $\dfrac{270-72}{5\frac{1}{2}}=36$, la position du diagramme est atteinte 36 minutes après 9 h. Il est donc 9 h 36. RÉPONSE : (B)

25. Pour chaque valeur de x, on définit $f(x)$ comme étant la valeur minimale des trois expressions $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$ et $-\frac{3}{4}x+7$. Quelle est la valeur maximale de $f(x)$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** 2 **(C)** $\frac{17}{5}$ **(D)** $\frac{62}{11}$ **(E)** 7

Solution

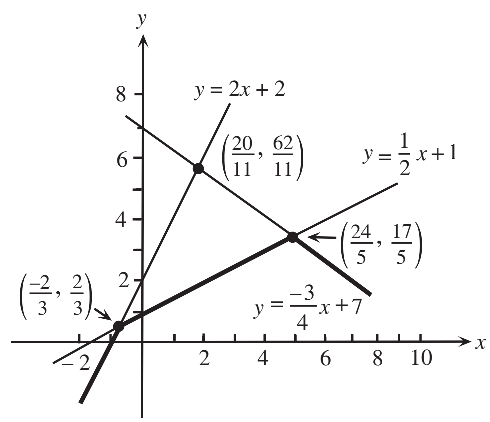
Les trois expressions, $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$ et $-\frac{3}{4}x+7$, peuvent définir les droites respectives d'équations $y=2x+2$ (1), $y=\frac{1}{2}x+1$ (2) et $y=-\frac{3}{4}x+7$ (3). Chaque expression représente alors l'ordonnée d'un point sur la droite correspondante.

On trace une esquisse des droites et on détermine les points d'intersection.

Pour déterminer le point d'intersection des droites (1) et (2), posons $2x+2=\frac{1}{2}x+1$. Donc :

$$\frac{3}{2}x=-1$$
$$x=-\frac{2}{3}$$

On reporte cette valeur dans l'équation (1) pour obtenir :



$$y=2\left(-\frac{2}{3}\right)+2$$
$$y=\frac{2}{3}$$

Le point d'intersection des droites (1) et (2) a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

De même, le point d'intersection des droites (1) et (3) a pour coordonnées $\left(\frac{20}{11},\frac{62}{11}\right)$ et le point d'intersection des droites (2) et (3) a pour coordonnées $\left(\frac{24}{5},\frac{17}{5}\right)$.

Pour chaque valeur de x, la valeur minimale des trois expressions $2x+2$, $\frac{1}{2}x+1$ et $-\frac{3}{4}x+7$ est représentée par la plus petite des ordonnées des trois points sur les droites correspondant à cette valeur de x. Les points choisis pour cette ordonnée minimale sont illustrés par un trait plus épais. La valeur maximale de ces ordonnées est $\frac{17}{5}$. RÉPONSE : (C)