Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

Concours Fermat (11e – Sec. V)

Le mercredi 18 février 1998

Avec la contribution de :

University of Waterloo

Banque Nationale du Canada

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation : Une réponse fautive n'est pas pénalisée.
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

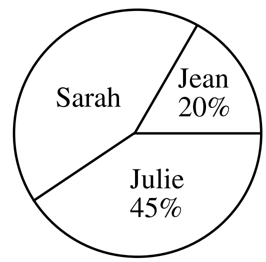
Partie A : 5 points par question

1. La valeur de $\frac{1+2+3+4+5}{2+4+6+8+10}$ est :

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) 2,5 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{11}{26}$ (**E**) $\frac{3}{8}$

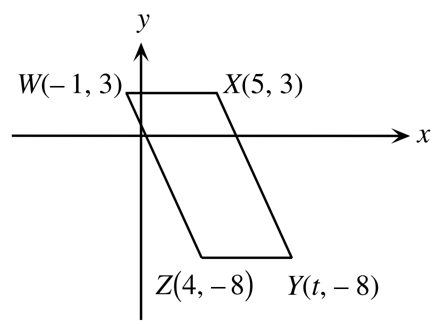
2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?

(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935



3. Si $WXYZ$ est un parallélogramme, alors t est égal à :

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 11 (**E**) 12



4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?

(**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

5. On définit une nouvelle opération $\otimes$, entre deux nombres p et q, comme suit : $p \otimes q = p^2 - 2q$. Quelle est la valeur de $7 \otimes 3$?

(**A**) 43 (**B**) 8 (**C**) 141 (**D**) 36 (**E**) 26

6. La valeur de $\frac{1}{3}$ de 6^{30} est :

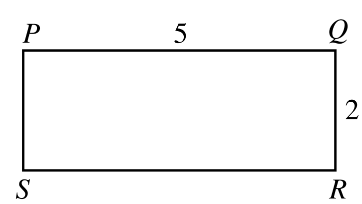
(**A**) 6^{10} (**B**) 2^{30} (**C**) 2^{10} (**D**) 2×6^{29} (**E**) 2×6^{10}

7. La moyenne d'une liste de 10 nombres est 0. Si on ajoute les nombres 72 et -12 à la liste, la nouvelle moyenne sera égale à :

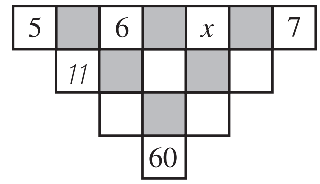
(**A**) 30 (**B**) 6 (**C**) 0 (**D**) 60 (**E**) 5

8. Le diagramme illustre une table de billard de forme rectangulaire. La table a une longueur de 5 unités et une largeur de 2 unités. À partir du point P, on fait rouler une boule à un angle de $45°$ par rapport à PQ. La boule ira rebondir sur SR. La boule rebondit plusieurs fois, sur divers côtés, à un angle de $45°$, jusqu'à ce qu'elle arrive au point S. Combien de fois la boule rebondit-elle avant d'arriver à S?

(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7
(**D**) 5 (**E**) 4

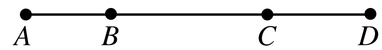


9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le ‘*11*’ a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9
(**D**) 15 (**E**) 10

10. Le diagramme montre quatre points sur un segment de droite. Si $AB : BC = 1:2$ et $BC : CD = 8:5$, alors $AB : BD$ est égal à :

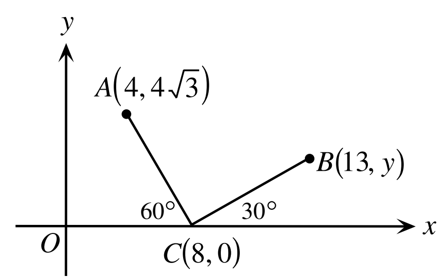


(**A**) $4:13$ (**B**) $1:13$ (**C**) $1:7$
(**D**) $3:13$ (**E**) $4:17$

Partie B : 6 points par question

11. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l’équation $3x + y = 100$ admet-elle?
(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

12. Dans le diagramme, la valeur de y est :



(**A**) $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ (**B**) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (**C**) 2
(**D**) 12 (**E**) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

13. On forme des entiers de trois chiffres en n’utilisant que les chiffres 1 et/ou 2. La somme de tous les entiers que l’on peut former est égale à :
(**A**) 1332 (**B**) 333 (**C**) 999 (**D**) 666 (**E**) 1665

14. Les droites l_1, l_2 et l_3 ont pour pentes respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. Les trois droites ont la même ordonnée à l’origine. Si la somme des trois abscisses à l’origine est égale à 36, alors l’ordonnée à l’origine est :
(**A**) $\frac{-13}{12}$ (**B**) $\frac{-12}{13}$ (**C**) -4 (**D**) 4 (**E**) -9

15. Si $-2 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 7$, $4 \le z \le 8$ et $w = xy - z$, alors la plus petite valeur que w puisse prendre est :
(**A**) -14 (**B**) -18 (**C**) -19 (**D**) -22 (**E**) -23

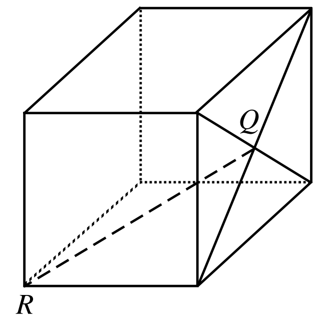
16. Si le nombre $N = (7^{p+4})(5^q)(2^3)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite valeur possible de $p + q$ est :
(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

17. On utilise seulement les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour former une suite de nombres comme suit : un 1, deux 2, trois 3, quatre 4, cinq 5, six 1, sept 2, ainsi de suite.
Voici le début de la suite : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Le 100^e nombre de la suite est :
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

18. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :

(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$

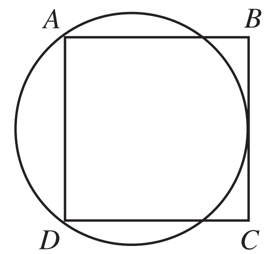
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$



19. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 14. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?

(**A**) 8,5 (**B**) 8,75 (**C**) 9

(**D**) 9,25 (**E**) 9,5



20. Un jeu compte 100 cartes numérotées de 1 à 100. Chaque carte a une face jaune et une face rouge, le même numéro paraissant sur chaque face. Jérôme place toutes les cartes sur une table, de manière à montrer les faces rouges. Il retourne d'abord chaque carte portant un nombre divisible par 2. En examinant ensuite toutes les cartes, il retourne chaque carte portant un numéro divisible par 3. Combien de cartes montrent une face rouge à la fin?

(**A**) 83 (**B**) 17 (**C**) 66 (**D**) 50 (**E**) 49

Partie C : 8 points par question

21. On multiplie les nombres $123\,456\,789$ et $999\,999\,999$. Combien des chiffres de la réponse sont des 9?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 17

22. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N = 5a + 3b + 5c$. De plus, $N = 4a + 5b + 4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a + b + c$?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

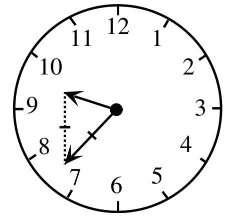
23. Trois tapis ont une aire totale de $200\ \text{m}^2$. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de $140\ \text{m}^2$. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de $24\ \text{m}^2$. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) $12\ \text{m}^2$ (**B**) $18\ \text{m}^2$ (**C**) $24\ \text{m}^2$ (**D**) $36\ \text{m}^2$ (**E**) $42\ \text{m}^2$

24. À un moment entre 9 h 30 et 10 h, le triangle formé par les aiguilles d'une montre est isocèle (voir le diagramme). Si chacun des angles égaux du triangle est deux fois plus grand que le troisième angle, quelle heure est-il?

(**A**) 9 h 35 (**B**) 9 h 36 (**C**) 9 h 37

(**D**) 9 h 38 (**E**) 9 h 39



25. Pour chaque valeur de x, on définit $f(x)$ comme étant la valeur minimale des trois expressions $2x + 2$, $\frac{1}{2}x + 1$ et $-\frac{3}{4}x + 7$. Quelle est la valeur maximale de $f(x)$?

(**A**) $\frac{2}{3}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{17}{5}$ (**D**) $\frac{62}{11}$ (**E**) 7