Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

# 1998 Solutions

# Concours Euclide

(12e année – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

1. a) Si $x=1$ est une racine de l'équation $x^2+2x-c=0$, quelle est la valeur de $c$?

***Solution 1***

Puisque $x=1$ est une racine, on a $1^2+2(1)-c=0$, d'où $c=3$.

***Solution 2***

On divise :

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{r}{x+3} \\ x-1 & \overline{x^2+2x-c} \\ & \underline{x^2-x} \\ & \quad 3x-c \\ & \quad \underline{3x-3} \\ & \quad -c+3 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{l|l} & x+3 \\ x^2+2x-c & \overline{x-1} \\ \underline{x^2-x} & \\ \quad 3x-c & \\ \quad \underline{3x-3} & \\ \quad -c+3 & \end{array}$$

Puisque $x=1$ est une racine, le reste est nul et $-c+3=0$.

Donc $c=3$.

b) Si $2^{2x-4}=8$, quelle est la valeur de $x$?

***Solution***

$2^{2x-4}=2^3$

Donc $2x-4=3$.

$x=\frac{7}{2}$

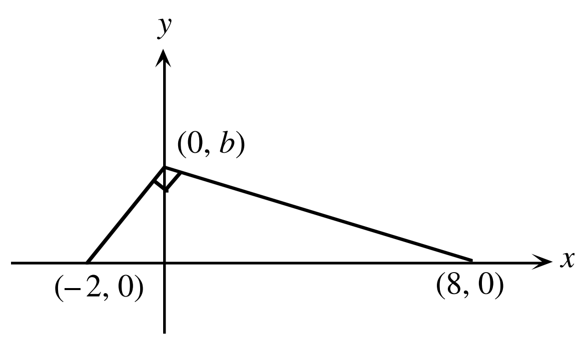
c) Deux droites perpendiculaires, ayant pour abscisses à l'origine respectives $-2$ et 8, se croisent au point $(0, b)$. Déterminer toutes les valeurs possibles de $b$.

***Solution 1***

Puisque les droites sont perpendiculaires,
le produit de leurs pentes est égal à $-1$.

Donc $\frac{b}{-8}\times\frac{b}{2}=-1$.

Donc $b^2=16$, d'où $b=\pm 4$.




***Solution 2***

Puisque les droites sont perpendiculaires, le triangle illustré est rectangle.

D'après le théorème de Pythagore, $\left[(b-0)^2+(0-8)^2\right]+\left[(b-0)^2+(0+2)^2\right]=10^2$.

Donc $2b^2=32$, d'où $b=\pm 4$.

***Solution 3***

Puisque les droites sont perpendiculaires, le triangle illustré est inscrit dans un cercle dont les sommets, $(-2, 0)$ et $(8, 0)$, sont les extrémités d'un diamètre. Ce cercle a donc pour centre $C(3, 0)$ et pour rayon $r = 5$. Son équation est $(x-3)^2 + y^2 = 25$.
Pour obtenir ses ordonnées à l'origine, posons $x = 0$.
Les ordonnées à l'origine sont 4 et $-4$.
Donc $b = \pm 4$.

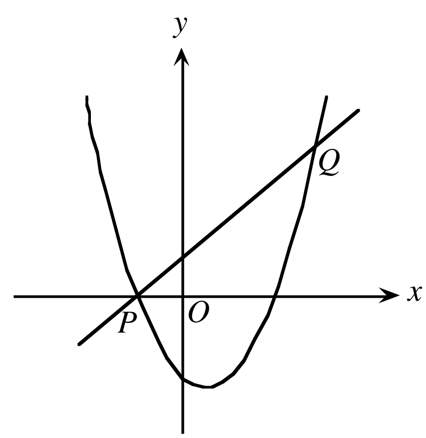
2. a) On considère la parabole définie par $y = (x-1)^2 + b$. Son sommet a pour coordonnées $(1, 3)$. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la parabole?

***Solution***
Puisque le sommet de la parabole est situé en $(1, b)$, alors $b = 3$.
L'équation de la parabole est donc $y = (x-1)^2 + 3$.
Pour l'ordonnée à l'origine, posons $x = 0$.
L'ordonnée à l'origine est donc égale à 4.

b) Quelle est l'aire du triangle $ABC$ dont les sommets sont situés en $A(-3, 1)$, $B(5, 1)$ et $C(8, 7)$?

***Solution***
Un diagramme nous permet de constater que l'on a un triangle ayant une base de 8 unités et une hauteur de 6 unités.
Le triangle a donc une aire de 24 unités carrées.

c) Le diagramme illustre la droite d'équation $y = x + 1$ qui croise la parabole d'équation $y = x^2 - 3x - 4$ aux points $P$ et $Q$. Déterminer les coordonnées de $P$ et de $Q$.




***Solution***
Pour un point d'intersection, on a $y = x + 1$ et $y = x^2 - 3x - 4$.
Par comparaison, on a $x + 1 = x^2 - 3x - 4$.

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$(x-5)(x+1) = 0$$

Donc $x = 5$ ou $x = -1$.
Si $x = 5$, alors $y = 6$. Si $x = -1$, alors $y = 0$.
Les coordonnées sont $P(-1, 0)$ et $Q(5, 6)$.

3. a) La représentation graphique de $y = m^x$ passe par les points $(2, 5)$ et $(5, n)$. Quelle est la valeur de $mn$ ?

***Solution***
Puisque $(2, 5)$ est situé sur la courbe, il vérifie l'équation et $5 = m^2$.
Puisque $(5, n)$ est situé sur la courbe, il vérifie l'équation et $n = m^5$.
Donc :

$$\begin{aligned} & mn \\ &= m\left(m^5\right) \\ &= m^6 \\ &= \left(m^2\right)^3 \ . \\ &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

b) Jeanne a acheté 100 actions à la bourse, au prix de 10,00 $ l'action. Lorsque le prix des actions a augmenté pour atteindre $N$ $ chacune, elle a donné toutes ses actions à la Fondation Euclide. Elle a reçu une remise d'impôt de 60 % de la valeur totale de son don. Cependant elle a dû payer un impôt de 20 % de l'augmentation de la valeur des actions. Déterminer la valeur de $N$ si la différence entre sa remise d'impôt et l'impôt payé est de 1000 $.

***Solution***
Jeanne a donné la somme de $100N$ dollars à la Fondation Euclide.
Sa remise d'impôt est égale à 60 % de $100N$, c'est-à-dire $60N$ dollars.
L'augmentation de la valeur des actions est égale à $100(N - 10)$, c'est-à-dire $(100N - 1000)$ dollars.
Elle a donc payé un impôt égal à 20 % de $100N - 1000$, c'est-à-dire $20N - 200$ dollars.
Donc $60N - (20N - 200) = 1000$.

$$\begin{aligned} 40N &= 800 \\ N &= 20 \end{aligned}$$

4. a) On considère la suite définie par $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et $t_n = \left(\frac{n-3}{n-1}\right) t_{n-2}$, où $n \geq 3$. Quelle est la valeur de $t_{1998}$?

***Solution 1***
On calcule les premiers termes : $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ , $t_3 = 0$, $t_4 = \frac{-1}{3}$, $t_5 = 0$ , $t_6 = \frac{-1}{5}$, etc.
On remarque la régularité et on obtient $t_{1998} = \frac{-1}{1997}$.

***Solution 2***

$$
\begin{aligned}
t_{1998} &= \frac{1995}{1997} t_{1996} \\
&= \frac{1995}{1997} \times \frac{1993}{1995} t_{1994} \\
&\vdots \\
&= \frac{1995}{1997} \cdot \frac{1993}{1995} \cdot \frac{1991}{1993} \cdots \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} t_2 \\
&= \frac{-1}{1997}
\end{aligned}
$$

b) Le $n^{e}$ terme d'une suite arithmétique est défini par $t_n = 555 - 7n$.
Si $S_n = t_1 + t_2 + ... + t_n$, déterminer la plus petite valeur de $n$ pour laquelle $S_n < 0$.

***Solution 1***

Le premier terme de la suite est $a = 548$ et la raison est $d = -7$. Donc :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\left[2(548) + (n-1)(-7)\right] \\
&= \frac{n}{2}\left[-7n + 1103\right]
\end{aligned}
$$

On veut que $\frac{n}{2}(-7n + 1103) < 0$.

Puisque $n > 0$, on a $-7n + 1103 < 0$.

Donc $n > 157\frac{4}{7}$.

La plus petite valeur de $n$ pour laquelle $S_n < 0$ est 158.

***Solution 2***

On veut que $\sum_{k=1}^{n} t_k < 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} (555 - 7k) < 0$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 555 - 7\sum_{k=1}^{n} k &< 0 \\
555n - 7\frac{(n)(n+1)}{2} &< 0 \\
1110n - 7n^2 - 7n &< 0 \\
7n^2 - 1103n &> 0 \\
7n - 1103 &> 0 \\
n &> \frac{1103}{7}
\end{aligned}
$$

La plus petite valeur de $n$ pour laquelle $S_n < 0$ est 158.

***Solution 3***

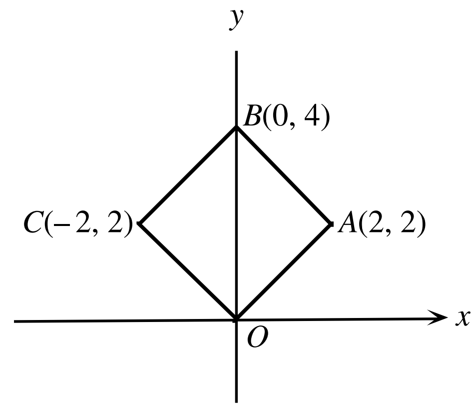
La suite est 548, 541, 534, ..., 2, $-5$, ..., $-544$, $-551$.

On additionne en regroupant le premier terme avec le dernier, le deuxième avec l'avant-dernier, etc.

On a alors $(548 - 551) + (541 - 544) + \ldots + (2 - 5)$. Il y a alors 79 parenthèses, chacune étant égale à $-3$. Cette somme est donc égale à $-237$.

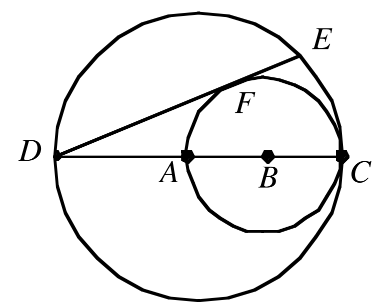
Si on avait omis le dernier terme, $-551$, la somme aurait été positive.
Pour une somme négative, il faut donc toutes les 79 parenthèses, c'est-à-dire 158 termes.

5. a) Le diagramme illustre un carré $OABC$ dont les coordonnées des sommets sont données. On considère le cercle dont l'aire est maximale, tout en étant situé à l'intérieur du carré. Quelle est l'équation du cercle?

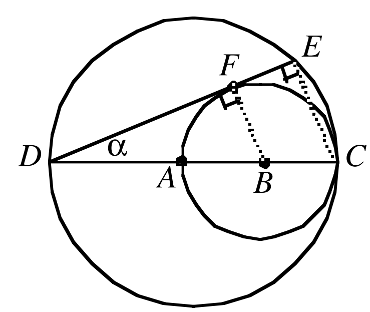



***Solution***
Chaque côté du carré a une longueur de $2\sqrt{2}$.
Le cercle a donc un diamètre de $2\sqrt{2}$, et un rayon de $\sqrt{2}$.
Le centre du cercle est situé en $(0, 2)$.
Son équation est donc $x^2 + (y-2)^2 = 2$ ou $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$.

b) Le diagramme illustre un grand cercle de centre $A$ et de diamètre $DC$. Le petit cercle a pour centre $B$ et pour diamètre $AC$. Si $DE$ est tangent au petit cercle en $F$ et si $DC = 12$, déterminer la longueur de $DE$.




***Solution***
On joint $B$ et $F$, de même que $C$ et $E$.
Puisque $DFE$ est une tangente, $FB$ est perpendiculaire à $DE$.
Puisque $DC$ est un diamètre, $\angle DEC = 90°$.
Donc $FB$ et $EC$ sont parallèles.
D'après le théorème de Pythagore, $DF = \sqrt{9^2 - 3^2}$, c'est-à-dire $DF = \sqrt{72}$.
Les triangles $DBF$ et $DCE$ sont semblables, puisque leurs angles correspondants sont égaux.
Donc :



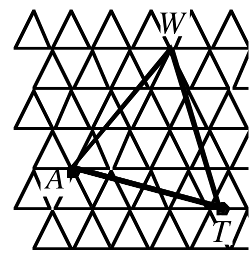

OU

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DB}$$
$$\frac{DE}{6\sqrt{2}} = \frac{12}{9}$$
$$DE = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{EC}{FB} = \frac{12}{9}$$
$$EC = \tfrac{4}{3} FB$$
$$EC = 4$$

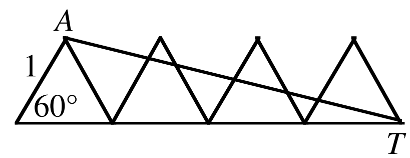
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $DCE$, $DE = 8\sqrt{2}$ .

6. a) Le quadrillage est formé de petits triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle $WAT$ sont aussi des sommets des petits triangles équilatéraux. Quelle est l'aire du triangle $WAT$ ?




***Solution 1***

$$AT^2 = 1^2 + 4^2 - 2(1)(4)\cos 60°$$
$$= 13$$




Par symétrie, le triangle $WAT$ est équilatéral.

Sa hauteur est donc égale à $\frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \sqrt{3}$.

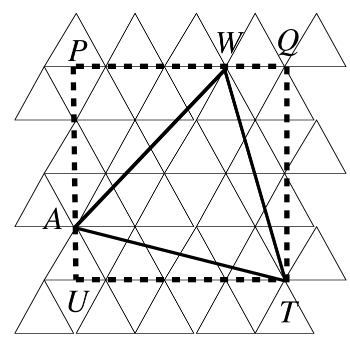
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\sqrt{13}\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ ou $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

***Solution 2***

Puisque chaque petit triangle a des côtés de longueur 1, chacun a une hauteur de $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

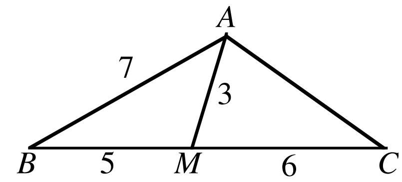
On considère le rectangle $PQTU$.

On a :




$$\begin{aligned}
|\Delta WAT| &= |PQTU| - |\Delta APW| - |\Delta WQT| - |\Delta TUA| \\
&= (PQ)(QT) - \frac{1}{2}(AP)(PW) - \frac{1}{2}(WQ)(QT) - \frac{1}{2}(TU)(UA) \\
&= (3,5)\left(2\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(2,5) - \frac{1}{2}(1)\left(2\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}(3,5)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 7\sqrt{3} - \frac{15\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{13\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

b) Le diagramme illustre un triangle $ABC$. $M$ est un point sur $BC$ de manière que $BM = 5$ et $MC = 6$. Si $AM = 3$ et $AB = 7$, déterminer la valeur exacte de $AC$.




***Solution***

Dans le triangle $ABM$, $\cos B = \dfrac{3^2 - 7^2 - 5^2}{-2(7)(5)}$

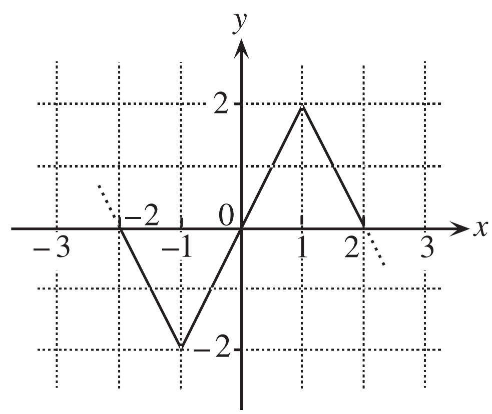
$= \dfrac{13}{14}.$

Dans le triangle $ABC$, $AC^2 = 7^2 + 11^2 - 2(7)(11)\left(\dfrac{13}{14}\right)$

$= 27.$

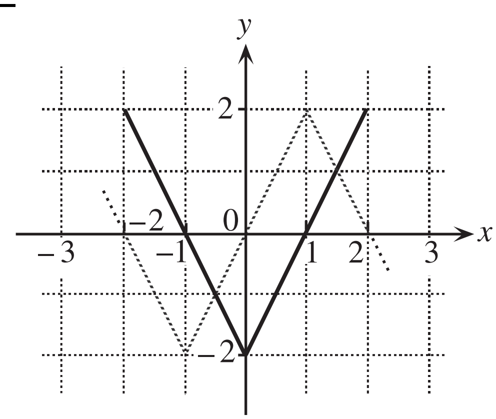
Donc $AC = \sqrt{27}$ .

7. a) La fonction *f* a une période de longueur 4. Le diagramme illustre une période de $y = f(x)$. Tracer la représentation graphique de $y = \frac{1}{2}[f(x-1) + f(x+3)]$ dans l'intervalle $-2 \le x \le 2$.




***Solution 1***

| $x$ | $f(x)$ | $f(x-1)$ | $f(x+3)$ | $\frac{1}{2}[f(x-1)+f(x+3)]$ |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 0 | 2 | 2 | 2 |
| $-1$ | $-2$ | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $-2$ | $-2$ | $-2$ |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 2 |




On place les points dans le plan et on les joint au moyen de segments.

***Solution 2***

Puisque $f(x)$ a une période de 4, $f(x+3) = f(x-1)$. Donc :

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\left[f(x-1)+f(x+3)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x-1)+f(x-1)\right] \\
&= f(x-1)
\end{aligned}
$$

La représentation graphique est celle de $y = f(x-1)$ que l'on obtient en faisant subir à la courbe donnée une translation de ***1 unité*** vers la droite.

b) Déterminer toutes les solutions $(x, y)$ du système d'équations suivant, $x$ et $y$ étant des nombres réels :

$$x^2 - xy + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + y = 0 .$$

***Solution 1***

Par soustraction :

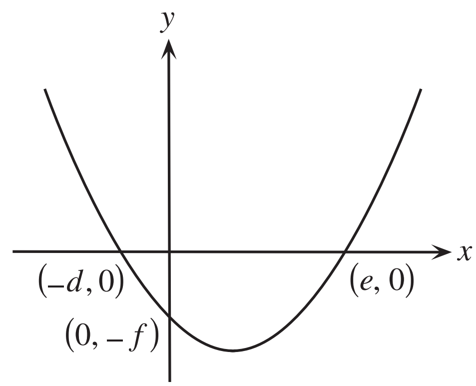
$$
\begin{array}{r}
x^2 - xy + 8 = 0 \\
x^2 - 8x + y = 0 \\
\hline
-xy + 8x + 8 - y = 0 \\
8(1+x) - y(1+x) = 0 \\
(8-y)(1+x) = 0 \\
y = 8 \quad \text{ou} \quad x = -1
\end{array}
$$

Si $y = 8$, chaque équation devient $x^2 - 8x + 8 = 0$, d'où $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$.
Si $x = -1$ chaque équation devient $y + 9 = 0$, d'où $y = -9$.
Les solutions sont $(-1, -9)$, $\left(4+2\sqrt{2}, 8\right)$ et $\left(4-2\sqrt{2}, 8\right)$.

***Solution 2***

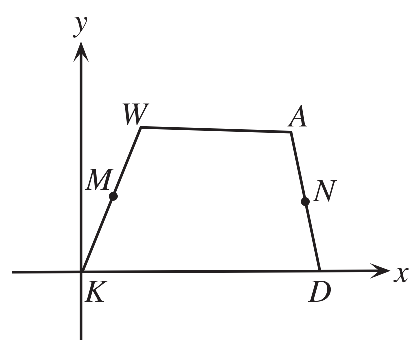
On isole $y$ pour obtenir $y = \dfrac{x^2+8}{x}$ et $y = 8x - x^2$.
Donc $\dfrac{x^2+8}{x} = 8x - x^2$ ou $x^3 - 7x^2 + 8 = 0$.
On remarque que $x = -1$ est une racine.
Donc $(x+1)$ est un facteur du polynôme $x^3 - 7x^2 + 8$.
Par inspection ou par division, l'équation devient $(x+1)\left(x^2 - 8x + 8\right) = 0$.
Les racines sont $x = -1$, $x = 4 + 2\sqrt{2}$ et $x = 4 - 2\sqrt{2}$.
On les reporte dans l'équation $y = 8x - x^2$.
Les solutions du système sont $(-1, -9)$, $\left(4+2\sqrt{2}, 8\right)$ et $\left(4-2\sqrt{2}, 8\right)$.

8. a) Le diagramme illustre l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation. Démontrer que $de = f$.

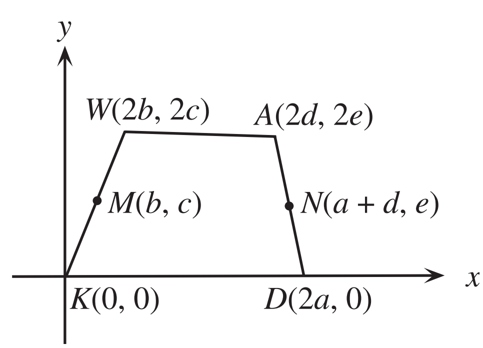



***Solution***
Puisque la parabole illustrée est la translation de la parabole d'équation $y = x^2$ et puisque ses abscisses à l'origine sont $-d$ et $e$, son équation est $y = (x+d)(x-e)$.
Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, posons $x = 0$. On obtient alors $y = -de$.
Puisque l'ordonnée à l'origine est égale à $-f$, alors $-f = -de$ ou $f = de$.

b) $M$ et $N$ sont les milieux respectifs des côtés $KW$ et $AD$ du quadrilatère $KWAD$. Si $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, démontrer que $WA$ est parallèle à $KD$.




***Solution 1***
On place un repère cartésien de manière que $K$ et $D$ aient pour coordonnées $K(0, 0)$ et $D(2a, 0)$. Soit $(2b, 2c)$ et $(2d, 2e)$ les coordonnées respectives de $W$ et de $A$.
Les coordonnées de $M$ sont donc $(b, c)$ et celles de $N$ sont $(a+d, e)$.
La pente de $KD$ est nulle et la pente de $WA$ est égale à $\frac{e-c}{d-b}$.




Puisque $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, alors :

$$\sqrt{(a+d-b)^2 + (e-c)^2} = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{(2d-2b)^2 + (2e-2c)^2}\right)$$

$$\sqrt{(a+d-b)^2 + (e-c)^2} = \frac{1}{2}\left(2a + 2\sqrt{(d-b)^2 + (e-c)^2}\right)$$

$$\sqrt{(a+d-b)^2 + (e-c)^2} = a + \sqrt{(d-b)^2 + (e-c)^2}$$

On élève chaque membre au carré pour obtenir :

$$(a+d-b)^2+(e-c)^2 = a^2+2a\sqrt{(d-b)^2+(e-c)^2}+(d-b)^2+(e-c)^2$$

$$a^2+2a(d-b)+(d-b)^2 = a^2+2a\sqrt{(d-b)^2+(e-c)^2}+(d-b)^2$$

On réduit et on divise chaque membre par $2a$ pour obtenir $d-b=\sqrt{(d-b)^2+(e-c)^2}$.

On élève chaque membre au carré pour obtenir $(d-b)^2=(d-b)^2+(e-c)^2$.

Donc $(e-c)^2=0$, d'où $e=c$.

Puisque $e=c$, la pente de $WA$ est nulle et $WA$ est parallèle à $KD$.

***Solution 2***

On joint *A* et *K*. Soit *P* le milieu de $AK$.

On joint ensuite *M* et *P*, *N* et *P*, de même que *M* et *N*.

*P* et *M* sont les milieux respectifs des côtés $KA$ et $KW$ du triangle $KAW$.

Donc $MP=\frac{1}{2}WA$ et $MP$ est parallèle à $WA$.

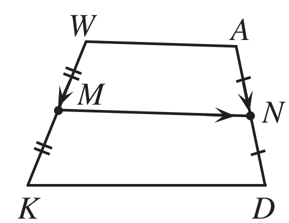
De même, dans le triangle $KAD$, on a $PN=\frac{1}{2}KD$ et $PN$ est parallèle à $KD$.

Puisque $MN=\frac{1}{2}(AW+DK)$, alors $MP+PN=MN$.

Donc *M*, *P* et *N* ne peuvent être les sommets d'un triangle. Ils doivent être alignés.

Puisque $MPN$ est un segment, que $MP$ est parallèle à $WA$ et que $PN$ est parallèle à $KD$, alors $WA$ est parallèle à $KD$.

***Solution 3***




On donne $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ND}$ et $\overrightarrow{WM}=\overrightarrow{MK}$.

D'après la loi de Chasles :

(1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MW}+\overrightarrow{WA}+\overrightarrow{AN}$

(2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DN}$

On remplace $\overrightarrow{MK}$ par $-\overrightarrow{MW}$ et $\overrightarrow{DN}$ par $-\overrightarrow{AN}$ dans (2) pour obtenir $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MW}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{AN}$ (3).

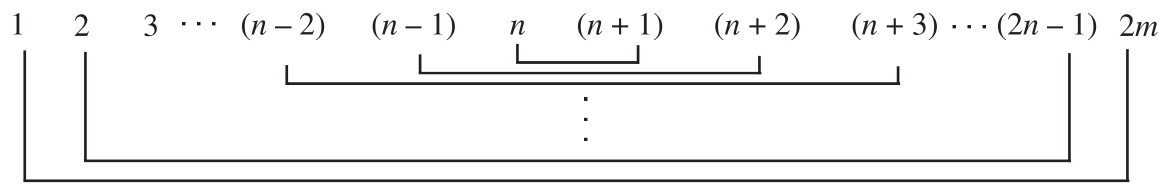
On additione (1) et (3), membre par membre, pour obtenir $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{WA}+\overrightarrow{KD}$.

Or il est donné que $2\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AW}\right|+\left|\overrightarrow{DK}\right|$.

D'après ces deux derniers énoncés, $\overrightarrow{MN}$ doit être parallèle à $\overrightarrow{WA}$ et à $\overrightarrow{KD}$, autrement on aurait $2\left|\overrightarrow{MN}\right|<\left|\overrightarrow{AW}\right|+\left|\overrightarrow{DK}\right|$.

Donc $WA$ est parallèle à $KD$.

9. On considère les $2n$ premiers entiers positifs. On apparie les nombres, comme dans le diagramme, et on multiplie les deux nombres de chaque paire. Démontrer qu'il n'existe aucune valeur de $n$ pour laquelle deux des $n$ produits sont égaux.




***Solution 1***

On obtient la suite de produits :

$1(2n),\ 2(2n-1),\ 3(2n-2),\ \ldots,\ k(2n-k+1),\ \ldots,\ p(2n-p+1),\ \ldots,\ n(n+1)$

Supposons qu'il existe deux entiers positifs, $p$ et $k$, chacun inférieur à $n$, tels que $k(2n-k+1)=p(2n-p+1)$.

Donc :

$$
\begin{aligned}
2nk-k^2+k &= 2np-p^2+p\\
p^2-k^2+2nk-2np+k-p &= 0\\
(p-k)(p+k)+2n(k-p)+(k-p) &= 0\\
(p-k)\big[(p+k)-2n-1\big] &= 0\\
(p-k)(p+k-2n-1) &= 0
\end{aligned}
$$

Puisque $p$ et $k$ sont inférieurs à $n$, alors $p+k-2n-1\neq 0$.

Donc $p=k$, ce qui démontre que $k(2n-k+1)$ et $p(2n-p+1)$ représentent le même terme de la suite de produits.

Il ne peut donc pas y avoir deux produits égaux.

***Solution 2***

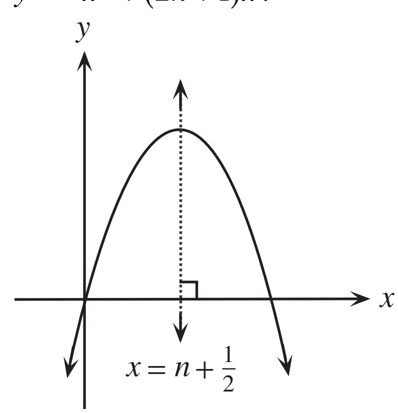
Les produits sont $1(2n+1-1)$, $2(2n+1-2)$, $3(2n+1-3)$, …, $n(2n+1-n)$.

On considère la fonction définie par $y=x(2n+1-x)$, c'est-à-dire $y=-x^2+(2n+1)x$.

Sa représentation graphique est une parabole, ouverte vers le bas, ayant son sommet en $x=n+\frac{1}{2}$.

Les produits sont alors les ordonnées des points de la parabole en $x=1, 2, 3, \ldots, n$. Puisque ces points sont tous situés à la gauche du sommet, où la courbe est croissante, ils sont tous distincts.

Les produits sont donc distincts.




***Solution 3***

La somme des nombres donnés est égale à $\dfrac{2n(2n+1)}{2}$ ou $n(2n+1)$.

Leur moyenne est égale à $\dfrac{n(2n+1)}{2n}$ ou $n+\dfrac{1}{2}$.

On peut récrire les $2n$ nombres sous la forme :

$$n+\frac{1}{2}-\left(\frac{2n-1}{2}\right),\ \ldots,\ n+\frac{1}{2}-\frac{3}{2},\ n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}+\frac{3}{2},\ \ldots,$$
$$n+\frac{1}{2}+\left(\frac{2n-1}{2}\right)$$

Si on calcule les produits, en commençant par celui du milieu et en allant vers les extrémités, on obtient :

$$P_1=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}$$
$$P_2=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}$$
$$\vdots$$
$$P_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2$$

Les nombres $\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2$ sont distincts, pour $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Les produits $P_k$ sont donc tous distincts.

***Solution 4***

La suite des produits est $1(2n),\ 2(2n-1),\ 3(2n-2),\ \ldots,\ n[2n-(n-1)]$.

Elle est composée de $n$ termes.

Lorsqu'on soustrait le $k^e$ terme du $(k+1)^e$ terme, la différence est égale à $(k+1)[2n-k]-k[2n-(k-1)]$ ou $2(n-k)$. Puisque $n>k$, cette différence est positive.

Chaque terme de la suite des produits est donc supérieur au terme précédent.

Les produits sont donc tous distincts.

10. Les équations $x^2+5x+6=0$ et $x^2+5x-6=0$ ont ***chacune*** des solutions entières, tandis qu'une seule des équations $x^2+4x+5=0$ et $x^2+4x-5=0$ admet des solutions entières.

a) Démontrer que si les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ ont ***chacune*** des solutions entières, alors il existe des entiers $a$ et $b$ pour lesquels $p^2=a^2+b^2$. (C.-à-d. que $(a, b, p)$ est un triplet pythagoricien.)

b) Déterminer $q$ en fonction de $a$ et de $b$.

***Solution***

a) Les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ admettent chacune des racines entières.

Les racines de $x^2+px+q=0$ sont $\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Puisque les racines sont entières, $p^2-4q$ est un carré parfait.

Il existe donc un entier positif $m$ pour lequel $p^2-4q=m^2$.

De même, les racines de $x^2 + px - q = 0$ sont $\dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ et puisqu'elles sont entières, $p^2 + 4q$ doit être un carré parfait.
Il existe donc un entier positif $n$ pour lequel $p^2 + 4q = n^2$.
On a donc, par addition, $2p^2 = m^2 + n^2$.
Or $n \geq m$, car $p^2 + 4q \geq p^2 - 4q$.
Donc
$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}n^2 \\ &= \left(\frac{n+m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2. \end{aligned}$$
Puisque $m^2 = p^2 - 4q$ et $n^2 = p^2 + 4q$, $m^2$ et $n^2$ ont la même parité que $p^2$. En effet, on obtient $m^2$ en soustrayant un nombre pair du nombre $p^2$, tandis que l'on obtient $n^2$ en additionnant un nombre pair à $p^2$. Donc $m$ et $n$ ont la même parité.
Donc $\dfrac{n+m}{2}$ et $\dfrac{n-m}{2}$ sont des entiers.
On a donc $p^2 = a^2 + b^2$, où $a = \dfrac{n+m}{2}$ et $b = \dfrac{n-m}{2}$.

b) Selon la partie a), $a = \dfrac{n+m}{2}$ and $b = \dfrac{n-m}{2}$, c.-à-d. $n = a + b$ et $m = a - b$.
Donc :
$$\begin{aligned} p^2 + 4q &= n^2 \\ 4q &= n^2 - p^2 \\ &= (a+b)^2 - \left(a^2 + b^2\right) \\ &= 2ab \end{aligned}$$
Donc $q = \dfrac{ab}{2}$.