Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide (12[e] – Sec. V)

pour les prix

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Le mardi 21 avril 1998

Avec la contribution de :

University of Waterloo

BANQUE NATIONALE DU CANADA

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :

IBM Canada Ltée

Institut canadien des actuaires

Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :

La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie

Northern Telecom (Nortel)

Financière Manuvie

L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice **est permise**, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

N'ouvrez pas ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 à 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse**. Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse**. Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse.
3. Des points sont accordés pour de solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

REMARQUES :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.
4. À moins d'avis contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de nombres exacts tels que 4π et $2+\sqrt{7}$.

1. a) Si $x=1$ est une racine de l'équation $x^2+2x-c=0$, quelle est la valeur de c?

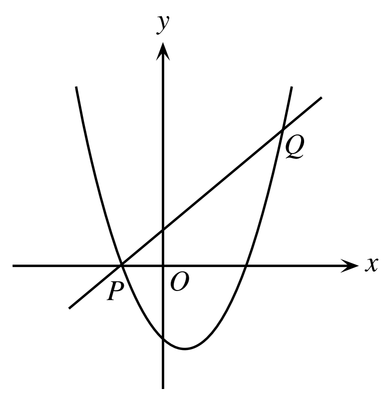
b) Si $2^{2x-4}=8$, quelle est la valeur de x?

c) Deux droites perpendiculaires, ayant pour abscisses à l'origine respectives -2 et 8, se croisent au point $(0, b)$. Déterminer toutes les valeurs possibles de b.

2. a) On considère la parabole définie par $y=(x-1)^2+b$. Son sommet a pour coordonnées $(1, 3)$. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la parabole?

b) Quelle est l'aire du triangle ABC dont les sommets sont situés en $A(-3, 1)$, $B(5, 1)$ et $C(8, 7)$?

c) Le diagramme illustre la droite d'équation $y=x+1$ qui croise la parabole d'équation $y=x^2-3x-4$ aux points P et Q. Déterminer les coordonnées de P et de Q.



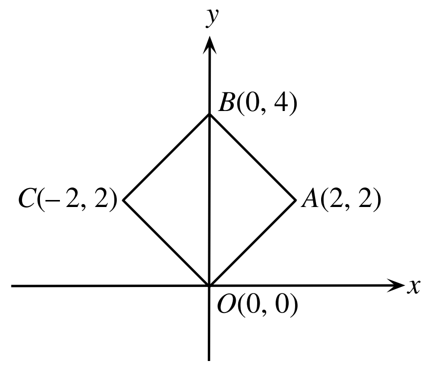
3. a) La représentation graphique de $y=m^x$ passe par les points $(2, 5)$ et $(5, n)$. Quelle est la valeur de mn?

b) Jeanne a acheté 100 actions à la bourse, au prix de 10,00 \$ l'action. Lorsque le prix des actions a augmenté pour atteindre N \$ chacune, elle a donné toutes ses actions à la Fondation Euclide. Elle a reçu une remise d'impôt de 60 % de la valeur totale de son don. Cependant elle a dû payer un impôt de 20 % de l'augmentation de la valeur des actions. Déterminer la valeur de N si la différence entre sa remise d'impôt et l'impôt payé est de 1000 \$.

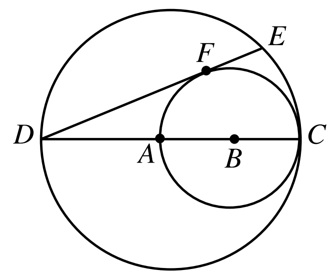
4. a) On considère la suite définie par $t_1=1$, $t_2=-1$ et $t_n=\left(\frac{n-3}{n-1}\right)t_{n-2}$, où $n\geq 3$. Quelle est la valeur de t_{1998}?

b) Le n^e terme d'une suite arithmétique est défini par $t_n=555-7n$.
Si $S_n=t_1+t_2+...+t_n$, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n<0$.

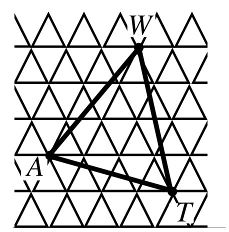
5. a) Le diagramme illustre un carré $OABC$ dont les coordonnées des sommets sont données. On considère le cercle dont l'aire est maximale, tout en étant situé à l'intérieur du carré. Quelle est l'équation du cercle?



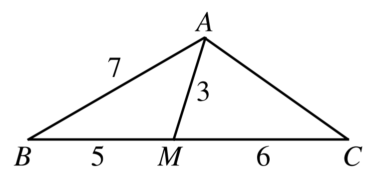
b) Le diagramme illustre un grand cercle de centre A et de diamètre DC. Le petit cercle a pour centre B et pour diamètre AC. Si DE est tangent au petit cercle en F et si $DC = 12$, déterminer la longueur de DE.



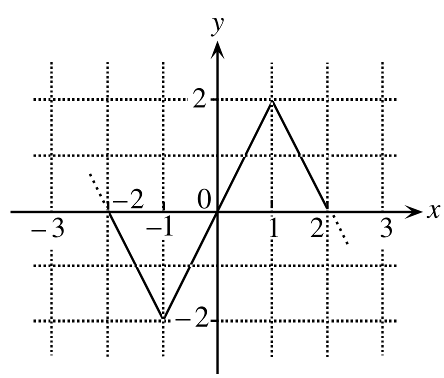
6. a) Le quadrillage est formé de petits triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle WAT sont aussi des sommets des petits triangles équilatéraux. Quelle est l'aire du triangle WAT ?



b) Le diagramme illustre un triangle ABC. M est un point sur BC de manière que $BM = 5$ et $MC = 6$. Si $AM = 3$ et $AB = 7$, déterminer la valeur exacte de AC.



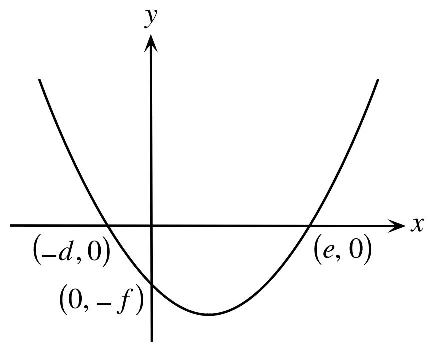
7. a) La fonction f a une période de longueur 4. Le diagramme illustre une période de $y = f(x)$. Tracer la représentation graphique de $y = \frac{1}{2}[f(x-1) + f(x+3)]$ dans l'intervalle $-2 \le x \le 2$.



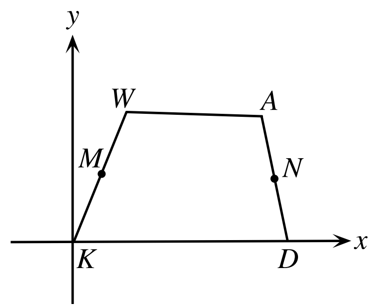
b) Déterminer toutes les solutions (x, y) du système d'équations suivant, x et y étant des nombres réels :

$$x^2 - xy + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + y = 0$$

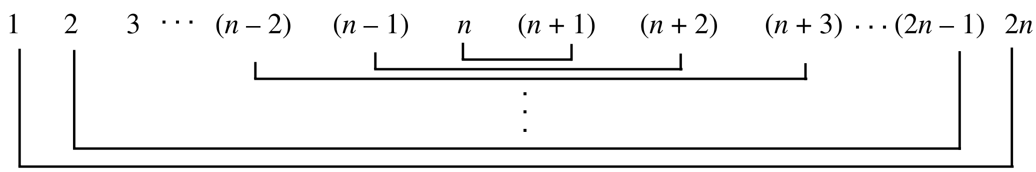
8. a) Le diagramme illustre l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par une translation. Démontrer que $de = f$.



b) M et N sont les milieux respectifs des côtés KW et AD du quadrilatère $KWAD$. Si $MN = \frac{1}{2}(AW + DK)$, démontrer que WA est parallèle à KD.



9. On considère les $2n$ premiers entiers positifs. On apparie les nombres, comme dans le diagramme, et on multiplie les deux nombres de chaque paire. Démontrer qu'il n'existe aucune valeur de n pour laquelle deux des n produits sont égaux.



10. Les équations $x^2 + 5x + 6 = 0$ et $x^2 + 5x - 6 = 0$ ont ***chacune*** des solutions entières, tandis qu'une seule des équations $x^2 + 4x + 5 = 0$ et $x^2 + 4x - 5 = 0$ admet des solutions entières.

a) Démontrer que si les équations $x^2 + px + q = 0$ et $x^2 + px - q = 0$ ont ***chacune*** des solutions entières, alors il existe des entiers a et b pour lesquels $p^2 = a^2 + b^2$. (C.-à-d. que (a, b, p) est un triplet pythagoricien.)

b) Déterminer q en fonction de a et de b.