canadien de
mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

1998 Solutions
Concours Cayley (10e - Sec. IV)

pour les prix
BANQUE NATIONALE DU CANADA

PARTIE A :

1. La valeur de $(0{,}3)^2 + 0{,}1$ est :

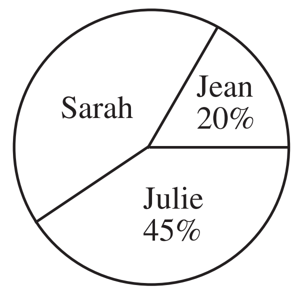
(**A**) 0,7 (**B**) 1 (**C**) 0,1 (**D**) 0,19 (**E**) 0,109

Solution

$$(0{,}3)^2 + 0{,}1 = 0{,}09 + 0{,}1$$
$$= 0{,}19$$

RÉPONSE : (D)

2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?



(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935

Solution

Le pourcentage des votes reçus par Sarah est égal à $100-(20+45)$, c'est-à-dire à 35. Or 35 % de 1000 est égal à $0{,}35(1000)$, c'est-à-dire à 350. Sarah a reçu 350 votes.

RÉPONSE : (B)

3. L'expression $\dfrac{a^9 \times a^{15}}{a^3}$ est égale à :

(**A**) a^{45} (**B**) a^8 (**C**) a^{18} (**D**) a^{14} (**E**) a^{21}

Solution

$$\frac{a^9 \times a^{15}}{a^3} = \frac{a^{24}}{a^3}$$
$$= a^{21}$$

RÉPONSE : (E)

4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?

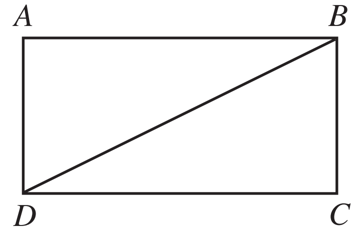
(**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

Solution

Les paires d'entiers positifs dont le produit est égal à 100 sont : 1 et 100, 2 et 50, 4 et 25, 5 et 20, 10 et 10. La paire 1 et 100 donne la plus grande somme. La plus grande valeur possible de

$p+q$ est 101. RÉPONSE : (B)

5. Le diagramme illustre un rectangle $ABCD$ tel que $DC = 12$. Si le triangle BDC a une aire de 30, quel est le périmètre du rectangle $ABCD$?



(**A**) 34 (**B**) 44 (**C**) 30
(**D**) 29 (**E**) 60

Solution
Puisque le triangle BDC a une aire de 30, alors le rectangle $ABCD$ a une aire de 60. Donc :

$$12(BC) = 60$$
$$BC = 5$$

Le rectangle $ABCD$ a un périmètre égal à $2(12) + 2(5)$, c'est-à-dire à 34. RÉPONSE : (A)

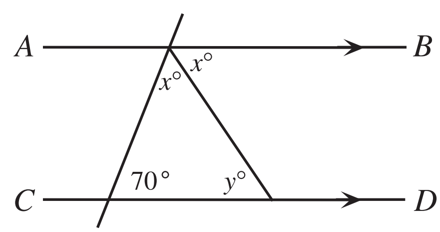
6. Si $x = 2$ est une solution de l'équation $qx - 3 = 11$, quelle est la valeur de q?
(**A**) 4 (**B**) 7 (**C**) 14 (**D**) -7 (**E**) -4

Solution
Puisque $x = 2$ est une solution de l'équation $qx - 3 = 11$, alors :

$$q(2) - 3 = 11$$
$$2q = 14$$
$$q = 7$$

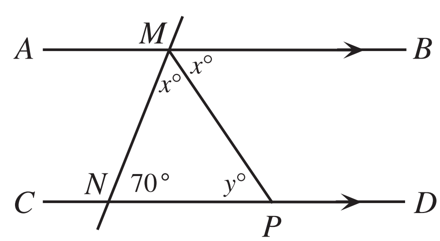
RÉPONSE : (B)

7. Dans le diagramme, AB est parallèle à CD. Quelle est la valeur de y?



(**A**) 75 (**B**) 40 (**C**) 35
(**D**) 55 (**E**) 50

Solution
Puisque AB est parallèle à CD, alors $\angle BMN + \angle MND = 180°$. Donc :



$$2x + 70 = 180$$
$$2x = 110$$
$$x = 55$$

D'après la somme des angles du triangle MNP,

$$y = 180 - (70 + 55)$$
$$= 55.$$

RÉPONSE : (D)

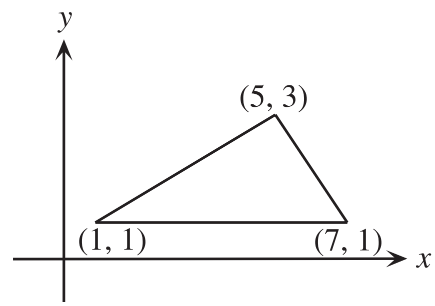
8. Les sommets d'un triangle ont pour coordonnées $(1,1)$, $(7,1)$ et $(5,3)$. Quelle est l'aire de ce triangle?

(**A**) 12 (**B**) 8 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Solution

Ce triangle a une base de 6 et une hauteur de 2, comme on peut le voir sur le diagramme.

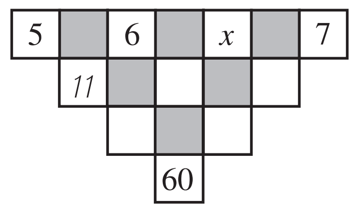
Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(2)$, c'est-à-dire à 6.



RÉPONSE : (C)

9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '11' a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9
(**D**) 15 (**E**) 10



Solution

De gauche à droite, les trois nombres des cases blanches de la deuxième rangée sont 11, $6+x$ et $x+7$. De gauche à droite, les deux nombres des cases blanches de la troisième rangée sont $11+(6+x)$ et $(6+x)+(x+7)$, c'est-à-dire $17+x$ et $2x+13$. Le nombre de la quatrième rangée est $(17+x)+(2x+13)$, c'est-à-dire $3x+30$. Donc :

$$3x+30=60$$
$$3x=30$$
$$x=10$$

RÉPONSE : (E)

10. La somme des chiffres d'un nombre entier positif de cinq chiffres est égale à 2. (Un nombre entier de cinq chiffres ne peut pas commencer par un zéro.) Combien y a-t-il de tels entiers?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Solution

Puisque la somme des chiffres est égale à 2, les seules possibilités sont 20 000, 11 000, 10 100, 10 010 et 10 001. Il y a en a cinq. RÉPONSE : (E)

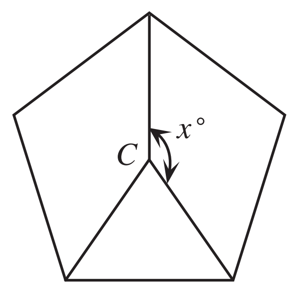
PARTIE B :

11. Si $x+y+z=25$, $x+y=19$ et $y+z=18$, alors y est égal à :
(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 12 (**D**) 6 (**E**) -6

Solution
On a: $x+y+z=25$ (1)
$x+y=19$ (2)
$y+z=18$ (3)
On additionne les équations (2) et (3), membre par membre, pour obtenir $x+2y+z=37$ (4). On soustrait l'équation (1) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $y=12$.

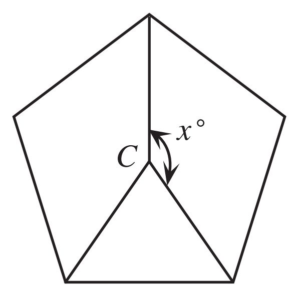
RÉPONSE : (C)

12. Le diagramme illustre un pentagone régulier de centre C. La valeur de x est :



(**A**) 144 (**B**) 150 (**C**) 120
(**D**) 108 (**E**) 72

Solution
On joint le point C à chacun des autres sommets, comme dans le diagramme. Puisque le pentagone est régulier, chacun des cinq petits angles en C mesure $360^\circ \div 5$, c'est-à-dire 72°.
Donc la valeur de x est 2×72, c'est-à-dire 144.



RÉPONSE : (A)

13. Si la surface d'un cube a une aire de 54, quel est le volume du cube?
(**A**) 36 (**B**) 9 (**C**) $\frac{81\sqrt{3}}{8}$ (**D**) 27 (**E**) $162\sqrt{6}$

Solution
Puisque la surface du cube a une aire de 54, chacune des six faces a une aire de 9.
Le cube a donc une arête de 3 unités.
Le volume du cube est donc égal à 3^3, c'est-à-dire à 27.

RÉPONSE : (D)

14. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l'équation $3x+y=100$ admet-elle?
(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

Solution

On récrit l'équation sous la forme $x = \dfrac{100-y}{3}$. Puisque x doit être un entier positif, $100-y$ doit être divisible par 3. Puisque y doit aussi être un entier positif, ses seules valeurs possibles sont 1, 4, 7, 10, 13, …, 94 et 97. Il y a donc 33 valeurs possibles de y. L'équation $3x+y=100$ admet donc 33 solutions.

RÉPONSE : (A)

15. Si $\sqrt{y-5}=5$ et $2^x=8$, alors $x+y$ est égal à :
(**A**) 13 (**B**) 28 (**C**) 33 (**D**) 35 (**E**) 38

Solution

On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{y-5} &= 5\\ \left(\sqrt{y-5}\right)^2 &= 5^2\\ y-5 &= 25\\ y &= 30\end{aligned}$$

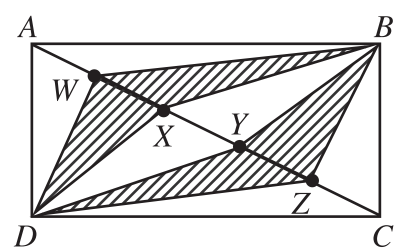
De plus :

$$\begin{aligned}2^x &= 8\\ x &= 3\end{aligned}$$

Donc $x+y=33$.

RÉPONSE : (C)

16. Le rectangle $ABCD$ a une longueur de 9 et une largeur de 5. Sa diagonale AC est divisée en cinq parties égales par les points W, X, Y et Z. Quelle est l'aire de la partie ombrée?



(**A**) 36 (**B**) $\frac{36}{5}$ (**C**) 18

(**D**) $\dfrac{4\sqrt{106}}{5}$ (**E**) $\dfrac{2\sqrt{106}}{5}$

Solution

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(9)(5)$, c'est-à-dire à $\frac{45}{2}$. Puisque les triangles ABW, WBX, XBY, YBZ et ZBC ont des bases égales et la même hauteur, leur aire est égale à $\frac{1}{5}\left(\frac{45}{2}\right)$, c'est-à-dire à $\frac{9}{2}$. De même, les triangles ADW, WDX, XDY, YDZ et ZDC ont tous une aire de $\frac{9}{2}$. L'aire de la partie ombrée est donc égale à $4\times\frac{9}{2}$, c'est-à-dire à 18.

RÉPONSE : (C)

17. Si le nombre $N=\left(7^{p+4}\right)\left(5^q\right)\left(2^3\right)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite

valeur possible de $p+q$ est :

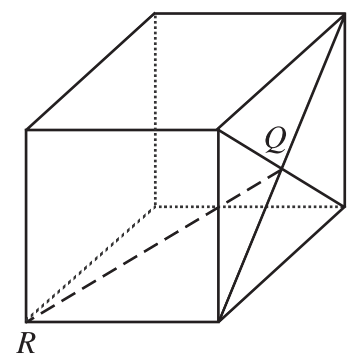
(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

Solution

Pour que N soit un cube parfait, il faut que chacun de ses facteurs premiers ait pour exposant un multiple de 3. La plus petite valeur possible de p est 2 et la plus petite valeur possible de q est 3. La plus petite valeur possible de $p+q$ est 5.

RÉPONSE : (A)

18. Les arêtes d'un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d'intersection des diagonales d'une des faces. La longueur du segment QR est égale à :

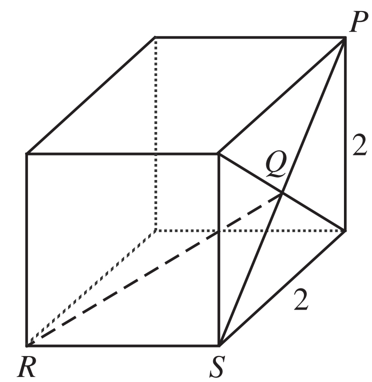


(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$

(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$

Solution

On considère les points P et S illustrés dans le diagramme. Sachant que les arêtes ont une longueur de 2 unités, on utilise le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la diagonale PS.



$$PS^2 = 2^2 + 2^2$$
$$PS^2 = 8$$
$$PS = 2\sqrt{2}$$

Puisque Q est le milieu du segment PS, alors $QS = \sqrt{2}$.

Puisqu'il s'agit d'un cube, le triangle QRS est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$QR^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$QR^2 = 6$$
$$QR = \sqrt{6}$$

RÉPONSE : (E)

19. Monsieur Lebel a plus de 25 élèves dans sa classe. Il y a plus de 2, mais moins de 10 garçons dans sa classe. De plus, il y a plus de 14, mais moins de 23 filles dans sa classe. Combien de nombres différents peuvent représenter le nombre total d'élèves dans sa classe, tout en vérifiant ces conditions?

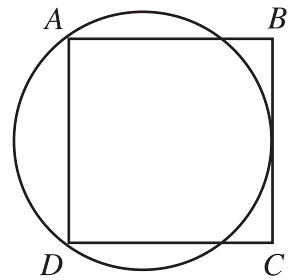
(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 4

Solution

Soit g le nombre de garçons et f le nombre de filles dans la classe de Monsieur Lebel.
On sait que $g + f > 25$, $2 < g < 10$ et $14 < f < 23$.
Seuls les couples (g, f) suivants vérifient toutes les trois contraintes : $(4, 22)$, $(5, 21)$, $(5, 22)$, $(6, 20)$, $(6, 21)$, $(6, 22)$, $(7, 19)$, $(7, 20)$, $(7, 21)$, $(7, 22)$, $(8, 18)$, $(8, 19)$, $(8, 20)$, $(8, 21)$, $(8, 22)$, $(9, 17)$, $(9, 18)$, $(9, 19)$, $(9, 20)$, $(9, 21)$ et $(9, 22)$.
Ces couples (g, f) donnent les sommes suivantes : 26, 27, 28, 29, 30 et 31.
Le total d'élèves dans la classe de Monsieur Lebel peut être représenté par 6 nombres différents.

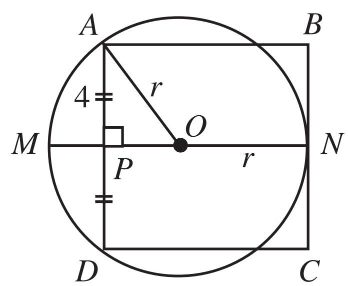
RÉPONSE : (B)

20. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 8. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6
(**D**) $4\sqrt{2}$ (**E**) 5,25

Solution



Soit r le rayon du cercle et O son centre. Soit MN le diamètre qui coupe le côté AD perpendiculairement en son milieu P. On joint O et A.
Puisque P est le milieu de AD, on a $AP = 4$.
Puisque $ON = r$, alors :

$$\begin{aligned} PO &= PN - ON \\ &= 8 - r \end{aligned}$$

Le triangle APO est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 + (8 - r)^2 \\ r^2 &= 16 + 64 - 16r + r^2 \\ 16r &= 80 \\ r &= 5 \end{aligned}$$

Le cercle a donc un rayon de 5.

RÉPONSE : (B)

PARTIE C :

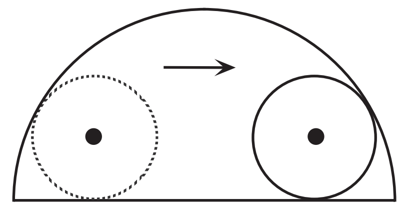
21. Lorsque Clodie reporte $x = 1$ dans l'expression $ax^3 - 2x + c$, elle obtient une valeur de -5. Lorsqu'elle reporte $x = 4$ dans l'expression, elle obtient une valeur de 52. Parmi les nombres suivants, la valeur de x qui donne à l'expression une valeur de zéro est :

(**A**) 2 (**B**) $\frac{5}{2}$ (**C**) 3 (**D**) $\frac{7}{2}$ (**E**) 4

Solution

Lorsque $x=1$, Clodie obtient $a(1)^3-2(1)+c=-5$, c'est-à-dire $a+c=-3 \quad (1)$.
De même, lorsque $x=4$, elle obtient $a(4)^3-2(4)+c=52$, c'est-à-dire $64a+c=60 \quad (2)$.
On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $63a=63$, d'où $a=1$.
On reporte $a=1$ dans l'équation (1) pour obtenir $c=-4$.
L'expression ax^3-2x+c devient donc x^3-2x-4.
On peut procéder par tâtonnement en attribuant à x des valeurs qui sont des diviseurs positifs ou négatifs de 4. Lorsque $x=2$, on obtient $2^3-2(2)-4=0$. RÉPONSE : (A)

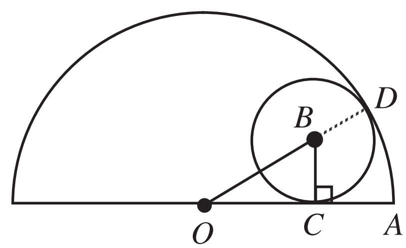
22. On fait rouler une roue de rayon 8 le long du diamètre d'un demi-cercle de rayon 25, jusqu'à ce qu'elle frappe le demi-cercle. Quelle est la longueur totale des deux parties du diamètre qui ne peuvent être touchées par la roue?



(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 15
(**D**) 17 (**E**) 20

Solution

Soit O le centre du demi-cercle, B le centre de la roue et C le point de tangence de la roue et du diamètre du demi-cercle. Le triangle OBC est donc rectangle en C.



On prolonge OB jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle en D.
Puisque BD et BC sont des rayons de la roue, ils ont chacun une longueur de 8. Donc :

$$\begin{aligned} OB &= 25-8 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Le triangle OBC est rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OC^2 &= 17^2-8^2 \\ OC^2 &= 225 \\ OC &= 15 \end{aligned}$$

Donc $AC = 25-15$
$= 10.$

La longueur totale des deux parties du diamètre qui ne peuvent être touchées par la roue est égale à $2AC$, c'est-à-dire à 20. RÉPONSE : (E)

23. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N=5a+3b+5c$. De plus, $N=4a+5b+4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a+b+c$?
(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

Solution

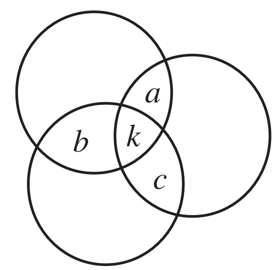
On a $N = 5a + 3b + 5c$ (1) et $N = 4a + 5b + 4c$ (2).
On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 4 pour obtenir $4N = 20a + 12b + 20c$ (3).
On multiplie chaque membre de l'équation (2) par 5 pour obtenir $5N = 20a + 25b + 20c$ (4).
On soustrait l'équation (3) de l'équation (4), membre par membre, pour obtenir $N = 13b$.
Puisque N et b sont des entiers positifs, N doit être un multiple de 13.
Puisque $131 < N < 150$, N doit être égal à 143. Donc $143 = 13b$, d'où $b = 11$.
On reporte $N = 143$ et $b = 11$ dans l'équation (1) pour obtenir :

$$143 = 5a + 3(11) + 5c$$
$$110 = 5a + 5c$$
$$22 = a + c$$

Donc la valeur de $a + b + c$ est égale à $11 + 22$, c'est-à-dire 33. RÉPONSE : (D)

24. Trois tapis ont une aire totale de $200\ \text{m}^2$. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de $140\ \text{m}^2$. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de $24\ \text{m}^2$. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?
(**A**) $12\ \text{m}^2$ (**B**) $18\ \text{m}^2$ (**C**) $24\ \text{m}^2$ (**D**) $36\ \text{m}^2$ (**E**) $42\ \text{m}^2$

Solution
On illustre les trois tapis comme dans le diagramme. $a + b + c$ représente l'aire de la surface recouverte par exactement deux tapis et k représente l'aire de la surface recouverte par trois tapis.
On donne $a + b + c = 24$ (1).



Puisque les trois tapis ont une aire totale de $200\ \text{m}^2$ et puisqu'ils recouvrent une surface de $140\ \text{m}^2$ lorsqu'ils sont partiellement superposés, il y a alors une surface de $60\ \text{m}^2$ qui est « gaspillée » par les deux ou trois couches de tapis superposés.
Donc $a + b + c + 2k = 60$ (2). On soustrait l'équation (1) de l'équation (2), membre par membre, pour obtenir $2k = 36$, d'où $k = 18$.
L'aire de la surface recouverte par trois tapis est donc égale à $18\ \text{m}^2$. RÉPONSE : (B)

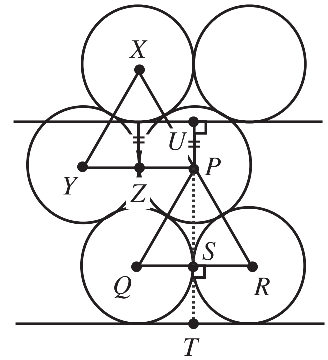
25. On veut placer 10 000 cercles, ayant chacun un diamètre de 1, dans un carré mesurant 100 sur 100. On peut le faire en plaçant les cercles en 100 rangées de 100 cercles. Si on place plutôt les cercles de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral, quel est le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer?
(**A**) 647 (**B**) 1442 (**C**) 1343 (**D**) 1443 (**E**) 1344

Solution
Pour commencer, on retire un cercle de chaque deuxième rangée et on déplace ces rangées de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral. Le diagramme illustre quelques-uns de ces cercles. Puisque chaque cercle a un diamètre de 1, les

triangles PQR et PXY sont équilatéraux avec des côtés de longueur 1.
Dans le triangle PQR, on abaisse la hauteur PS.
Le triangle PRS est rectangle. D'après le triangle de Pythagore, on a :

$$PS^2 = (1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$PS^2 = \frac{3}{4}$$
$$PS = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De même, $XZ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Puisque chaque cercle a un rayon de $\frac{1}{2}$, alors $PU = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ et $TU = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire $TU = \sqrt{3}$. Ayant placé deux rangées de cercles, ceux-ci occupent donc une hauteur de $\sqrt{3}$ avant de permettre le placement d'une troisième rangée. Cette hauteur est la hauteur entre les lignes horizontales du diagramme. Or $\frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,7$.

On peut placer 57 rangées doubles, chaque rangée double contenant $100 + 99 = 199$ cercles.
Est-il possible de placer une rangée additionnelle? Oui. Le carré a des côtés de longueur 100, tandis que les 57 rangées doubles occupent une hauteur de $57\sqrt{3}$ et $57\sqrt{3} \approx 98,7$. Il reste donc assez de place pour une rangée additionnelle de 100 cercles.
Le nombre total de cercles que l'on peut placer est égal à $57(199) + 100$, c'est-à-dire à 11 443.
Le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer est égal à $11\,443 - 10\,000$, c'est-à-dire à 1443.

RÉPONSE : (D)