Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

35e Anniversaire 1963 – 1998

Concours Cayley (10e – Sec. IV)

Le mercredi 18 février 1998

Avec la contribution de :
University of Waterloo
Banque Nationale du Canada
Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Avec la participation de :
IBM Canada Ltée
Institut canadien des actuaires
Sybase inc (Waterloo)

Avec l'appui de :
La Great-West Compagnie d'Assurance-Vie
Northern Telecom (Nortel)
Financière Manuvie
L'Équitable, Compagnie d'Assurance-Vie du Canada

Durée : 1 heure

L'usage de la calculatrice est permis, pourvu qu'elle ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Directives

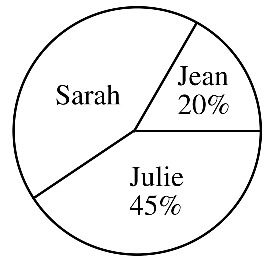
1. Attendez le signal du surveillant avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponse. Au besoin, demandez à l'enseignant-e d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Aussi, il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droit de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation :
   Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
   Il *n'y a pas* de pénalité pour une réponse fautive.
   Chaque question restée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 20 points.
8. Les diagrammes *ne sont pas* dessinés à l'échelle. Ils sont inclus pour aider seulement.
9. Après le signal du surveillant, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Notation :	Une réponse fautive n'est pas pénalisée. On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 20 points.

Partie A : 5 points par question

1. La valeur de $(0{,}3)^2 + 0{,}1$ est :
(**A**) 0,7 (**B**) 1 (**C**) 0,1 (**D**) 0,19 (**E**) 0,109

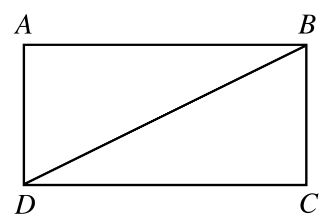
2. Le diagramme circulaire indique les pourcentages des 1000 votes reçus par les candidats lors d'une élection à l'école. Combien de votes Sarah a-t-elle reçus?
(**A**) 550 (**B**) 350 (**C**) 330
(**D**) 450 (**E**) 935



3. L'expression $\dfrac{a^9 \times a^{15}}{a^3}$ est égale à :
(**A**) a^{45} (**B**) a^8 (**C**) a^{18} (**D**) a^{14} (**E**) a^{21}

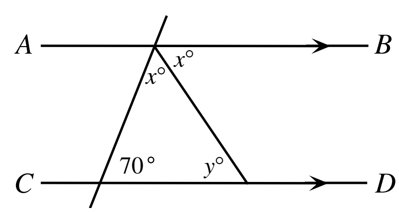
4. Le produit de deux entiers positifs, p et q, est égal à 100. Quelle est la plus grande valeur possible de $p+q$?
(**A**) 52 (**B**) 101 (**C**) 20 (**D**) 29 (**E**) 25

5. Le diagramme illustre un rectangle $ABCD$ tel que $DC = 12$. Si le triangle BDC a une aire de 30, quel est le périmètre du rectangle $ABCD$?
(**A**) 34 (**B**) 44 (**C**) 30
(**D**) 29 (**E**) 60



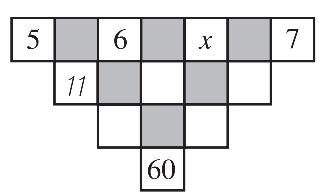
6. Si $x = 2$ est une solution de l'équation $qx - 3 = 11$, quelle est la valeur de q?
(**A**) 4 (**B**) 7 (**C**) 14 (**D**) -7 (**E**) -4

7. Dans le diagramme, AB est parallèle à CD. Quelle est la valeur de y?
(**A**) 75 (**B**) 40 (**C**) 35
(**D**) 55 (**E**) 50



8. Les sommets d'un triangle ont pour coordonnées $(1,1)$, $(7,1)$ et $(5,3)$. Quelle est l'aire de ce triangle?
(**A**) 12 (**B**) 8 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

9. Un nombre dans une case blanche est obtenu en additionnant les nombres des deux cases blanches de la rangée précédente qui sont tout près. (Le '*11*' a été obtenu de cette façon.) La valeur de x est :
(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 9
(**D**) 15 (**E**) 10



10. La somme des chiffres d’un nombre entier positif de cinq chiffres est égale à 2. (Un nombre entier de cinq chiffres ne peut pas commencer par un zéro.) Combien y a-t-il de tels entiers?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

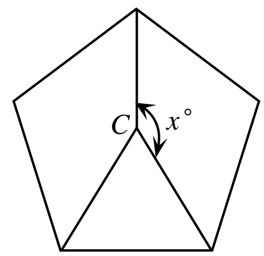
Partie B : 6 points par question

11. Si $x+y+z=25$, $x+y=19$ et $y+z=18$, alors y est égal à :

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 12 (**D**) 6 (**E**) -6

12. Le diagramme illustre un pentagone régulier de centre C. La valeur de x est :

(**A**) 144 (**B**) 150 (**C**) 120
(**D**) 108 (**E**) 72



13. Si la surface d’un cube a une aire de 54, quel est le volume du cube?

(**A**) 36 (**B**) 9 (**C**) $\frac{81\sqrt{3}}{8}$ (**D**) 27 (**E**) $162\sqrt{6}$

14. Si x et y sont des entiers positifs, combien de solutions (x, y) l’équation $3x+y=100$ admet-elle?

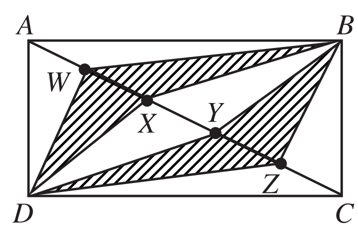
(**A**) 33 (**B**) 35 (**C**) 100 (**D**) 101 (**E**) 97

15. Si $\sqrt{y-5}=5$ et $2^x=8$, alors $x+y$ est égal à :

(**A**) 13 (**B**) 28 (**C**) 33 (**D**) 35 (**E**) 38

16. Le rectangle $ABCD$ a une longueur de 9 et une largeur de 5. Sa diagonale AC est divisée en cinq parties égales par les points W, X, Y et Z. Quelle est l’aire de la partie ombrée?

(**A**) 36 (**B**) $\frac{36}{5}$ (**C**) 18
(**D**) $\frac{4\sqrt{106}}{5}$ (**E**) $\frac{2\sqrt{106}}{5}$

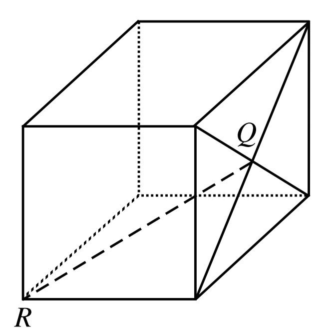


17. Si le nombre $N=\left(7^{p+4}\right)\left(5^{q}\right)\left(2^{3}\right)$ est un cube parfait, p et q étant des entiers positifs, la plus petite valeur possible de $p+q$ est :

(**A**) 5 (**B**) 2 (**C**) 8 (**D**) 6 (**E**) 12

18. Les arêtes d’un cube ont une longueur de 2 unités. Le point Q est le point d’intersection des diagonales d’une des faces. La longueur du segment QR est égale à :

(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{8}$ (**C**) $\sqrt{5}$
(**D**) $\sqrt{12}$ (**E**) $\sqrt{6}$



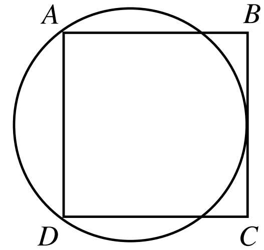
19. Monsieur Lebel a plus de 25 élèves dans sa classe. Il y a plus de 2, mais moins de 10 garçons dans sa classe. De plus, il y a plus de 14, mais moins de 23 filles dans sa classe. Combien de nombres différents peuvent représenter le nombre total d'élèves dans sa classe, tout en vérifiant ces conditions?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 3 (**E**) 4

20. Chaque côté d'un carré $ABCD$ a une longueur de 8. On trace un cercle, passant aux points A et D, de manière qu'il soit tangent au côté BC. Quel est le rayon du cercle?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6

(**D**) $4\sqrt{2}$ (**E**) 5,25



Partie C : 8 points par question

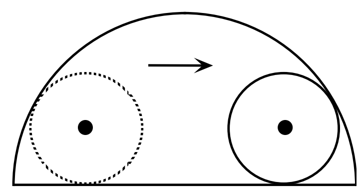
21. Lorsque Clodie reporte $x = 1$ dans l'expression $ax^3 - 2x + c$, elle obtient une valeur de -5. Lorsqu'elle reporte $x = 4$ dans l'expression, elle obtient une valeur de 52. Parmi les nombres suivants, la valeur de x qui donne à l'expression une valeur de zéro est :

(**A**) 2 (**B**) $\frac{5}{2}$ (**C**) 3 (**D**) $\frac{7}{2}$ (**E**) 4

22. On fait rouler une roue de rayon 8 le long du diamètre d'un demi-cercle de rayon 25, jusqu'à ce qu'elle frappe le demi-cercle. Quelle est la longueur totale des deux parties du diamètre qui ne peuvent être touchées par la roue?

(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 15

(**D**) 17 (**E**) 20



23. On considère quatre entiers positifs différents, a, b, c et N, tels que $N = 5a + 3b + 5c$. De plus, $N = 4a + 5b + 4c$ et N est un nombre entre 131 et 150. Quelle est la valeur de $a + b + c$?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 33 (**E**) 36

24. Trois tapis ont une aire totale de 200 m^2. En les superposant partiellement, on recouvre une surface de 140 m^2. La partie recouverte par exactement deux tapis a une aire de 24 m^2. Quelle est l'aire de la surface recouverte par trois tapis?

(**A**) 12 m^2 (**B**) 18 m^2 (**C**) 24 m^2 (**D**) 36 m^2 (**E**) 42 m^2

25. On veut placer 10 000 cercles, ayant chacun un diamètre de 1, dans un carré mesurant 100 sur 100. On peut le faire en plaçant les cercles en 100 rangées de 100 cercles. Si on place plutôt les cercles de manière que les centres de n'importe quels trois cercles tangents l'un à l'autre forment un triangle équilatéral, quel est le nombre maximal de cercles additionnels que l'on peut placer?

(**A**) 647 (**B**) 1442 (**C**) 1343 (**D**) 1443 (**E**) 1344